日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年秋季研究発表会

排他制約付きナップサック問題の一解法

02992050 防衛大学校情報工学科 *セニスカ アミント SENISUKA Aminto
02992040 防衛大学校情報工学科 柳 秉燮 YOU Byungjun
01700900 防衛大学校情報工学科 山田 武夫 YAMADA Takeo

1 はじめに

n 個の商品 $1, 2, \ldots, n$ があり, 商品 i の重量と利得をそれぞれ w_i, p_i とする. これらを容量 C のナップサックに詰め込み, 総利得を最大とする問題は ナップサック問題 (**KP**) と呼ばれ, 多数の研究がなされている [1]. 本稿では, いくつかの商品が両立しない, いわゆる排他制約付きナップサック問題 (**DCKP**) を考える. DCKP については Yamada 等の研究 [2] があり, 陰伏列挙法を用いて, 商品数 $n = 1000$ 程度までの問題を解いているが, 本稿ではラグランジュ緩和と釘付けテストを用いてより大規模な DCKP を解くことを試みる.

2 問題の定式化

両立しない商品対の集合を E, x_j を商品 j の採否を表す決定変数とし, それらから成る 0-1 ベクトルを $x := (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ とすると, 問題は次のように定式化される.

DCKP:

$$\text{maximize} \quad z(x) := \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \tag{1}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq C \tag{2}$$

$$x_i + x_j \leq 1, \quad \forall (i,j) \in E \tag{3}$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

ここで, (3) が排他制約を表し, $m := |E|$ とする. $E = \emptyset$ のときは DCKP は KP そのもので, KP がすでに $\mathcal{NP}$-困難なので, DCKP もまた $\mathcal{NP}$-困難である.

以下では, さほど一般性を失うことなく次を仮定する.

(i) 問題のデータ $C, w_j, p_j (j = 1, 2 \ldots, n)$ はすべて正整数である.

(ii) $\sum_{j=1}^{n} w_j > C$ かつ $w_j \leq C, j \in N$.

(iii) 商品は相対利得 p_j/w_j の大きいものから順に番号付けられている. すなわち

$$p_1/w_1 \geq p_2/w_2 \geq \ldots \geq p_n/w_n. \tag{5}$$

3 ラグランジュ緩和

$(i,j) \in E$ に付随するラグランジュ乗数を $\lambda_{ij} \geq 0$ とし, それらの全体を $\lambda = (\lambda_{ij})$ とすると, ラグランジュ関数は

$$\begin{aligned} L(x, \lambda) &:= \sum_{j=1}^{n} p_j x_j + \sum_{(i,j) \in E} \lambda_{ij}(1 - x_i - x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (p_j - \sum_{i \in E(j)} \lambda_{ij}) x_j + \sum_{(i,j) \in E} \lambda_{ij} \end{aligned} \tag{6}$$

となる. ここに $E(j) := \{i | (i,j) \in E\}$ である. $\lambda \geq 0$ が与えられたとき, 問題

LDCKP(λ):

$$\text{maximize} \quad L(x, \lambda) \tag{7}$$

$$\text{subject to} \quad \sum w_j x_j \leq C \tag{8}$$

$$0 \leq x_j \leq 1 \tag{9}$$

の最適目的関数値を $\bar{z}_L(\lambda)$ とすると, これは λ について区分的に線形な凸関数となり,

$$z^* \leq \bar{z}_L(\lambda)$$

を満たす. $\bar{z}_L(\lambda)$ は, 微分可能な λ で,

$$\frac{\partial \bar{z}_L(\lambda)}{\partial \lambda} = (1 - x_i - x_j) \tag{10}$$

なので, 劣勾配法によって $\bar{z}_L(\lambda)$ を最小とする $\lambda = \lambda^\dagger \geq 0$ を得ることが出来る. これを DCKP の上界値 UB とする. $\lambda = \lambda^\dagger$ における **LDCKP**($\lambda^\dagger$) の解を $\boldsymbol{x}^\dagger = (x_i^\dagger)$ とすると, これを多少修正して DCKP の実行可能解が得られる. さらに, グリーディ法などにより改善した時の目的関数値を下界値 LB とすると, 最適値は LB と UB の間に存在する. すなわち,

$$LB \leq z^* \leq UB \tag{11}$$

4 釘付けテスト

LDCKP(λ) は通常の (連続型) ナップサック問題なので, 釘付けテスト[3] により一部の変数を 0 または 1 に固定し, 問題を縮小することが出来る. 今,

$$\bar{p}_j := p_j - \sum_{i \in E(j)} \lambda_{ij} \qquad (12)$$

と置き, 商品は $\bar{p}_j/w_j$ の降順に並べ替られていて , 商品 s が臨界商品であるとする. すなわち

$$\sum_{j=1}^{s-1} w_j \le C < \sum_{j=1}^{s} w_j \qquad (13)$$

ここで,

$$\theta_j := \bar{p}_j - r_s w_j \qquad (14)$$

とすると, 以下が成立する [3].
定理 DCKP の最適解 $x^\star = (x_j^\star)$ において,

(i) $UB - LB < \ \ \theta_j$ ならば, $x_j^\star = 1$
(ii) $UB - LB < -\theta_j$ ならば, $x_j^\star = 0$

5 数値例

図 1 で容量を C=3000 とした場合を考える. ただし, 図中の各節点に p_j と w_j を付している. 図 2 は, λ=0 から出発して劣勾配法により, 10 回の反復で上界値 UB=4159 を得るプロセスを示している.

図 3 中の各枝に最適な $\lambda^\dagger$ を, また各節点に $\bar{p}_j$ と θ_j を付している. LDCKP($\lambda^\dagger$) の解から, ラグランジュ解 x_L = (111010011010), $\underline{z}_L = 3293$ が得られ, これにグリーディ法を適用すると, x_G = (111010111010), $\underline{z}_G$ = 3387 となる. さらに, 2-opt 法で解を改善すると, x_2 = (11110111010), $\underline{z}_2$ = 4097 となって, gap=4159-4097=62 を得る. 図 3 で θ_j が gap より大きい節点は 1 に固定され, -gap より小さい節点は 0 に固定される. これらを図中に二重丸と破線で示した. これらを除くと問題は 6 変数, 4 排他制約にまで縮小される. この問題を NUOPT を用いて解くと, 目的関数は 1149 となり, 固定された利得 2970 と合わせて 4119 を得る. DCKP を直接 NUOPT で解いても同じ値となるので, 釘付けが正しく行われていることが確認される.

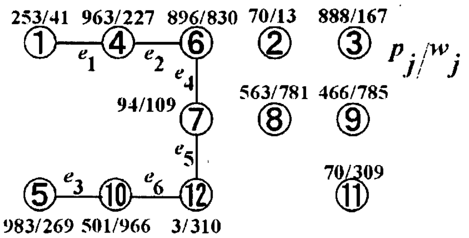

図 1: 例題

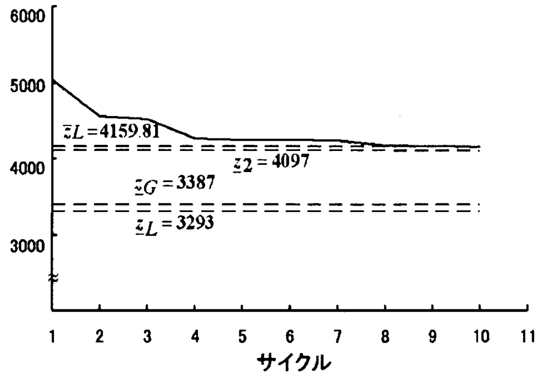

図 2: 上下界値の評価

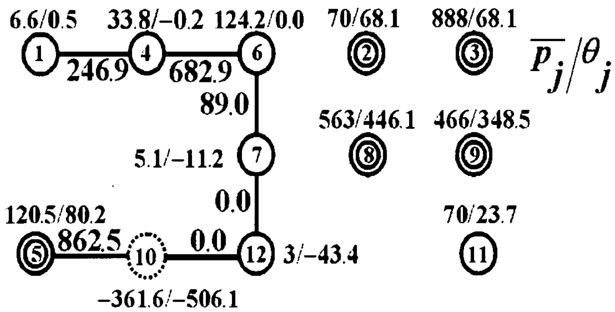

図 3: 釘付けテスト

6 まとめ

DCKP にラグランジュ緩和と釘付けテストを適用することを試みた. この方式を用いて数千変数の問題を解いているが, 実験の詳細は当日報告させて頂く.

参考文献

[1] Martello, S., Toth, P., *Knapsack Problrems: Algorithms and Computer Implementations*, Wiley, New York(1990).

[2] Yamada, T., Kataoka, S., Watanabe, K., "Heuristic and Exact Algorithms for Disjunctively Constrained Knapsack Problem", IPS Journal, Vol. 43 No. 9, pp. 2864-2870, 2002.

[3] 今野 浩, 鈴木久敏 (編), 整数計画法と組合せ最適化, 日科技連, 1982.