凸幾何の特徴多項式における Whitney-Rota の公式

中村政隆 (No. 01402860)
東京大学総合文化研究科広域システム科学系
153-8902 目黒区駒場３－８－１　nakamura@klee.c.u-tokyo.ac.jp

L を最小元 O, 最大元 I をもつ ranked poset として、かつ $O \neq I$ とる。L の特徴多項式、β-不変量は

$$p(L;\lambda) = \sum_{x \in L} \mu(O,x)\lambda^{h(I)-h(x)}, \qquad \beta(L) = -\left.\frac{d\,p(L;\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=1} = \sum_{x \in L} \mu(O,x)h(x) \tag{1}$$

で定義される ([3, 5])。ここで μ は L の Möbius function, h は height function である。これから、マトロイドの特徴多項式 $p(\mathcal{L}(M);\lambda)$、$\beta$-不変量 $\beta(\mathcal{L}(M))$ が定義できる。これらを $p(M;\lambda)$、$\beta(M)$ と書くと、

$$p(M;\lambda) = \sum_{X \in \mathcal{L}(M)} \mu_M(\emptyset, X)\lambda^{r(E)-r(X)}, \qquad \beta(M) = \sum_{X \in \mathcal{L}(M)} \mu_M(\emptyset, X) r(X) \tag{2}$$

ここで、r は M のランク関数、μ_M は束 $\mathcal{L}(M)$ の Möbius 関数とする。マトロイドの特徴多項式、β-invariant について以下が成立することは、良く知られている。

(I) Boolean Expansions をもつ。

(II) Deletion-Contraction Rule をみたす。特に、マトロイドが直和分解されるときは、特徴多項式は対応した因子の積になる。

(III) Whitney-Rota の公式が成立する：
E 上の任意の線形順序 ω から定まる broken circuit に対して、どの broken circuit も含まないような集合の全体のなす単体的複体を broken-circuit complex $BC(M,\omega)$ と呼ぶ。f_i が complex $BC(M,\omega)$ の $(i-1)$-次元面の数を表わすとき、マトロイド M の特徴多項式に対して次の **Whitney-Rota の公式** が成立する (Rota [3])。

$$p(M;\lambda) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i f_i \lambda^{r-i} \tag{3}$$

凸幾何の束 $\mathbb{K}$ から定義される特徴多項式と β-invariant を、$p(\mathbb{K};\lambda)$ と $\beta(\mathbb{K})$ とすると、

$$p(\mathbb{K};\lambda) = \sum_{X \in \mathbb{K}} \mu_{\mathbb{K}}(\emptyset, X)\lambda^{|E|-|A|}, \qquad \beta(\mathbb{K}) = \sum_{X \in \mathbb{K}} \mu_{\mathbb{K}}(\emptyset, X)|X| \tag{4}$$

マトロイドの性質 (I), (II), (III) が、以下のように凸幾何 $(E,\mathbb{K})$ においても相似に成立する。

Theorem 1 (Boolean expansions)

$$p(\mathbb{K};\lambda)=\sum_{A\in 2^E}(-1)^{|A|}\lambda^{|E|-|Ex(A)|}=\sum_{A\in 2^E}(-1)^{|A|}\lambda^{|E|-|\sigma(A)|}, \tag{5}$$

$$\beta(\mathbb{K})=\sum_{A\in 2^E}(-1)^{|A|}|Ex(A)|=\sum_{A\in 2^E}(-1)^{|A|}|\sigma(A)|. \tag{6}$$

Theorem 2 (Direct-sum factorization and deletion-contraction rule)

(1) $(E,\mathbb{K})$ が loop-free でかつ、$\mathbb{K}=\mathbb{K}_1\oplus\mathbb{K}_2$ と非自明に直和分解されるとすると、

$$p(\mathbb{K};\lambda)=p(\mathbb{K}_1;\lambda)p(\mathbb{K}_2;\lambda),\qquad \beta(\mathbb{K})=0. \tag{7}$$

(2) $e\in E$ がコループでかつ $E\setminus e\neq\emptyset$ のとき

$$p(\mathbb{K};\lambda)=-p(\mathbb{K}/e;\lambda)+\lambda p(\mathbb{K}\setminus e;\lambda),\qquad \beta(\mathbb{K})=-\beta(\mathbb{K}/e)+\beta(\mathbb{K}\setminus e). \tag{8}$$

凸幾何における Whitney-Rota の公式: 凸幾何のサーキット C は、$Ex(C)=C\setminus e$ をみたす元 $e\in C$ を unique にもつ。この e を根 root と呼び、$C\setminus e$ を茎 stem と呼ぶ。凸幾何で、stem を含まないような集合の全体のなす単体的複体を stem complex $SF(\mathbb{K})$ と呼ぶことにする。$f_i=|\{X\in SF(\mathbb{K}) : |X|=i\}|$ $(i=0,1,\ldots,n)$ によって $SF(\mathbb{K})$ の f-vector $f=(f_0,\ldots,f_n)$ を定めると、

Theorem 3 $p(\mathbb{K};\lambda)$ を凸幾何 $(E,\mathbb{K})$ の特徴多項式、$f=(f_0,\ldots,f_n)$ を stem complex $SF(\mathbb{K})$ の f-vector とすると、

$$p(\mathbb{K};\lambda)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i f_i\lambda^{n-i} \tag{9}$$

β-不変量について補足すると、アフィン点配置 $\mathcal{A}\subseteq\mathbb{R}^d$ の凸幾何では、その β-不変量の絶対値 $|\beta(\mathbb{K}(\mathcal{A}))|$ が $\mathcal{A}$ の内点の数に一致することが、Edelman and Reiner [1]、Klain [2] によって独立に証明されている。

References

[1] P.H. Edelman and V. Reiner, "Counting interior points of a point configuration," *Disc. Math.* 23 (2000) 1–13.

[2] D. A. Klain, "An Euler relation for valuations on polytopes," *Adv. in Math.* 147 (1999), 1–34.

[3] G.-C. Rota, "Ont the Foundations of Combinatorial Theory I. Theory of Möbius Functions," *Z. Wahrscheinlichkeitstheoreie* 2 (1964) 340–368.

[4] M. Nakamura, "The Deletion-Contraction Rule and Whitney-Rota's Formula for the Characteristic Functions of Convex Geometries," preprint.

[5] T. Zaslavsky, "The Möbius function and the characteristic polynomials," in: N. White ed., *Combinatorial Geometries*, Cambridge Univ. Press, 1987, 114–138.