日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年秋季研究発表会

最適化と評価のデリバティブ

01003676 九州大学 岩本 誠一 IWAMOTO Seiichi

1 はじめに

この報告では、(1) 多重積分、(2) 多変数関数の最適値、および (3) 積分評価の最適値、を求める「再帰式」をそれぞれ導き、各再帰式の「微分」をとる。微分した再帰式が表す問題を原問題のデリバティブ（派生問題）という。あわせて非確率的動的計画法を導入する。

2 多重積分の評価

いま a_m 正の定数として、2 次の n 変数加法型関数

$$f_n(x) := a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2$$

の D 上の n 重積分

$$\mathcal{P}_n(c) \quad \text{eval} \quad \iint\cdots\int_D f_n(x)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

を考えよう。ただし

$$D: \begin{array}{ll} \text{(i)} & x_1 + x_2 + \cdots + x_n \le c \\ \text{(ii)} & x_m \ge 0 \quad 0 \le m \le n \end{array}$$

ここに $c \ge 0$. これを積分評価問題という。この値を $w_n(c)$ とすると、前向きの再帰式

$$\begin{cases} w_1(c) = r_1(c) \\ w_n(c) = r_n(c) + \displaystyle\int_0^c w_{n-1}(x)dx \end{cases}$$

が成り立つ。ただし

$$r_n(c) = \int_0^c \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}a_n(c-x)^2dx.$$

3 多変数最適問題

加法型関数の n 変数最適問題を考えよう。

$$\mathcal{P}_n(x) \quad \begin{array}{lll} \min & & a_1u_1^2 + a_2u_2^2 + \cdots + a_nu_n^2 \\ \text{s.t.} & \text{(i)} & u_1 + u_2 + \cdots + u_n = x \\ & \text{(ii)} & u_m \ge 0 \quad 0 \le m \le n \end{array}$$

ただし a_m 正の定数。x は非負の実定数であるが、以下の解析では変数としてとらえる。この最小値を $v_n(x)$ とすると、次の前向きの再帰式が成り立つことがわかる。

補題 3.1

$$\begin{aligned} v_1(x) &= a_1x^2 \\ v_n(x) &= \min_{0\le u\le x}\left[a_nu^2 + v_{n-1}(x-u)\right]. \end{aligned} \tag{1}$$

これは確定的動的計画法である。(1) の最小値を与える関数 $\hat{u}_n = \hat{u}_n(x)$ は比例式 (proportional) $\hat{u}_n(x) = \hat{u}_nx$ $(0 \le \hat{u}_n \le 1)$ になることがわかる。したがって、(1) においては $u = u(x) = ux$ $(0 \le u \le 1)$ なる微分可能な $u = u(x)$ で最小化しても十分である。このとき、(1) の両辺は x で微分可能で、その導関数 $w_n(x) := v_n'(x)$ は次の再帰式を満たす。

定理 3.1 （1 階微分）$x \ge 0$ のとき

$$\begin{aligned} w_1(x) &= 2a_1x \\ w_n(x) &= \min_{0\le u\le 1}\left[2a_nu^2x + (1-u)w_{n-1}(x-ux)\right]. \end{aligned} \tag{2}$$

これは n 変数最小化問題

$$\mathcal{F}_n(x) \quad \begin{array}{ll} \min & 2a_1xu_1^2 + 2a_2x(1-u_1)^2u_2^2 + \cdots \\ & + 2a_{n-1}x(1-u_1)^2\cdots(1-u_{n-2})^2u_{n-1}^2 \\ & + 2a_nx(1-u_1)^2\cdots(1-u_{n-2})^2(1-u_{n-1})^2 \\ \text{s.t.} & 0 \le u_m \le 1 \quad 1 \le m \le n-1 \end{array}$$

の再帰式である。ただし $w_n(x)$ は $\mathcal{F}_n(x)$ の最小値とし、$w_1(x) = 2a_1x$ である。さらに 1 階微分の再帰式 (2) の両辺を微分すると、その導関数 $z_n(x) := w_n'(x)$ は次の再帰式を満たす。

定理 3.2 （2 階微分）$x \ge 0$ のとき

$$\begin{aligned} z_1(x) &= 2a_1 \\ z_n(x) &= \min_{0\le u\le 1}\left[2a_nu^2 + (1-u)^2z_{n-1}(x-ux)\right]. \end{aligned}$$

これは $\mathcal{F}_n(x)$ の目的関数から x を「削除」した最小化問題 $\mathcal{S}_n(x)$ の再帰式になっている。

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

4 多重積分の最適化

いま簡単のために 2 変数関数 f, g と 1 変数関数 h を 2 次関数

$$\begin{aligned} f(x,u) &= x^2+(u-x)^2+u^2 \\ g(y,v) &= y^2+(v-y)^2+v^2 \\ h(z) &= z^2 \end{aligned}$$

として、5 変数の加法型関数

$$\begin{aligned} & f(x,u)+g(y,v)+h(z) \\ = & \left[x^2+(u-x)^2+u^2+y^2+(v-y)^2+v^2+z^2\right] \\ = & [\cdots] \end{aligned}$$

を考える。非負の実数 a を任意に与えて、閉区間 $[0,a]$ 上の連続関数全体を $U(a)$ とする。2 つの関数 $u=u(x), v=v(y)$ を $U(a)$ から選ぶと、R^3 の単体領域

$$D=\{(x,y,z)\,|\,x+y+z\le a,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$$

上の実数値関数 $[\cdots]$ が定まる。したがって、この関数の D 上の 3 重積分の値が確定する〈評価〉。この積分値を最小にするには、$U(a)$ からどのような対 (u,v) を選べばよいだろうか〈最適化〉? この最小化問題を

$$\mathcal{P}_1(a) \quad \begin{array}{ll} \min & \displaystyle\iiint_D [\cdots]\,dxdydz \\ \text{s.t.} & (u,v)\in U(a)\times U(a) \end{array}$$

で表し、積分最小化問題という。

これを動的計画法で解くには、次のような埋め込みを行う。

$$E=\{(y,z)\,|\,y+z\le a,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$$

上の積分最小化問題

$$\mathcal{P}_2(a) \quad \begin{array}{ll} \min & \displaystyle\iint_E [g(y,v)+h(z)]\,dydz \\ \text{s.t.} & v\in U(a) \end{array}$$

および $F=[0,a]$ 上の積分評価問題

$$\mathcal{P}_3(a) \quad \text{eval} \quad \int_F z^2dz$$

を導入しよう。

さて問題 $\mathcal{P}_n(a)$ の最小値（評価値）を $w_n(a)$ とし、

$$\begin{aligned} r_2(a,v) &= \int_0^a (a-y)\left[y^2+(y-v)^2+v^2\right]dy \\ r_1(a,u) &= \int_0^a \frac{(a-x)^2}{2}\left[x^2+(x-u)^2+u^2\right]dx \end{aligned}$$

としよう。このとき、次の関係式が成り立つ。

補題 4.1

$$\begin{aligned} w_3(a) &= \frac{a^3}{3} \\ w_2(a) &= \min_{v\in U(a)}\left[r_2(a,v)+\int_0^a w_3(a)dy\right] \qquad (3) \\ w_1(a) &= \min_{u\in U(a)}\left[r_1(a,u)+\int_0^a w_2(a)dx\right]. \end{aligned}$$

これは加法型評価をもつ 3 段動的計画法の後ろ向き再帰式である。この動的計画法のダイナミックス（推移システム）はしかし確定的 (deterministic) でも、確率的 (stochastic) でもない。一般に確定的システムは確率的システムの特別な場合であるから、この推移システムは非確率的 (non-stochastic) と言える。この非確率的動的計画の状態空間は連続な空間 $S=[0,\infty)$ で、状態 $a\ (\in S)$ における可能な決定空間は $U(a)$ である。状態 a で決定 $u\in U(a)$ をとると、$z\in[0,a]$ なる任意の z に推移加重 1 で次の状態に行く。r_1, r_2 が各段利得（コスト）関数で、終端利得（コスト）関数は $k(a)=\dfrac{a^3}{3}$ である。この状態推移は決定に依存していない。

式 (3) を微分すると、次の再帰式が成り立つ。

補題 4.2（1 階微分）

$$\begin{aligned} w_3'(a) &= a^2 \\ w_2'(a) &= \min_{v\in U(a)}\left[r_2'(a,v)+\int_0^a w_3'(y)dy\right] \\ w_1'(a) &= \min_{u\in U(a)}\left[r_1'(a,u)+\int_0^a w_2'(x)dx\right]. \end{aligned}$$

ただし $r_2'(a,v)$ と $r_1'(a,u)$ はそれぞれ $r_2(a,v)$ と $r_1(a,u)$ の a による微分である：

$$\begin{aligned} r_2'(a,v) &= \int_0^a \left[y^2+(y-v)^2+v^2\right]dy \\ r_1'(a,u) &= \int_0^a (a-x)\left[x^2+(x-u)^2+u^2\right]dx. \end{aligned}$$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．