

不確実性と不完備情報の下での複占撤退

02103980 早稲田大学 *後藤 允 GOTO Makoto
01008370 早稲田大学 大野 高裕 ONO Takahiro

1 はじめに

本稿では、リアルオプション・アプローチとゲーム理論による企業の撤退行動を解析する。Murto [3] はこの分野の主な従来研究の1つであり、マルコフ完全均衡の概念を用いて非対称な情報完備ゲームを解析している。そこでは不確実性が低いとき一意の均衡が存在するが、不確実性が高く非対称性が低いときギャップ均衡が存在し、どちらの企業が先に撤退するか予測できなくなることを示している。一方この分野の情報不完備モデルは、先取りゲームを解析している Lambrecht and Perraudin [2] に代表されるが、開発が遅れている。撤退ゲームにおいては、Fudenberg and Tirole [1] 等が決定論的な情報不完備ゲームを解析している。

そこで本稿では、不完備情報を導入することによって Murto [3] を拡張する¹。これにより、不確実性と不完備情報の下での撤退行動を解析することを目的とする。

2 モデル

市場の初期状態は複占であるとする。企業はリスク中立的で価値を最大化し、一定の因子 $\rho (> 0)$ で割引くと仮定する。将来利益は未知の大きさである。一方の企業を i と表すとき、他方の企業は j と表される。ただし、 $i, j \in \{1, 2\}$ かつ $i \neq j$ である。時刻 $t (> 0)$ において、企業 i はコスト C_i を支払って収入フロー $X_t D_i$ を得る。また市場が独占状態ならば、時刻 t における企業 i の利益フローは $X_t M_i - C_i$ であり、 $0 < D_i < M_i$ とする。すなわち、 D_i, M_i はそれぞれ複占、独占の影響の大きさを表すパラメータである。また X_t は、幾何ブラウン運動過程

$$dX_t = \alpha X_t dt + \sigma X_t dz_t \quad (1)$$

$$X_0 = x > 0 \quad (2)$$

に従う。市場の一般的な収益性を表す指標であるとする。ただし、 $\alpha (< \rho)$ は X_t の期待成長率、 $\sigma (> 0)$ は X_t のボラティリティであり、 z_t は標準ブラウン運動である。任意の時刻において、企業 i はコスト $U_i (< C_i/\rho)$

¹またこれは、Fudenberg and Tirole [1] に不確実性を導入するという側面ももつ。

を支払って撤退することができる。したがって企業 i の意思決定は、いつ撤退するかを選択することである。

定義 1 企業 i の戦略は、 $X_t \in S_i$ ならば即座に撤退し、それ以外は市場に留まるという行動を定義する閉集合 $S_i \subset \mathbb{R}_+$ である。両企業の戦略の集合を $S = \{S_1, S_2\}$ と表す。

企業 i の撤退時刻は、

$$\tau_i = \tau(x, S_i) = \inf\{t > 0 : X_t \in S_i\} \quad (3)$$

であり、ゲームの終了時刻は $\bar{\tau} = \min\{\tau_1, \tau_2\}$ で表される。このとき、 x, S を仮定した企業 i の価値関数は、

$$V_i^D(x, S) = \mathbb{E} \left[\int_0^{\bar{\tau}} (X_t D_i - C_i) e^{-\rho t} dt + e^{-\rho \bar{\tau}} \left(1_{\{\tau_i > \tau_j\}} \cdot V_i^M(X_{\bar{\tau}}) - 1_{\{\tau_i \leq \tau_j\}} \cdot U_i \right) \right] \quad (4)$$

である。ただし、最終利益 $V_i^M(\cdot)$ は企業 i の独占価値であり、次節で導出する。企業 i の意思決定問題は、(4) 式を最大化する戦略 S_i を選択することである。

3 独占価値

企業 i の独占価値は、

$$V_i^M(x) = \sup_{\tau_i^M} \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau_i^M} (X_t M_i - C_i) e^{-\rho t} dt - U_i e^{-\rho \tau_i^M} \right] \quad (5)$$

である。ただし、ある一意の閾値 X_i^M に対して、

$$\tau_i^M = \inf\{t > 0 : X_t \leq X_i^M\} \quad (6)$$

は独占状態における企業 i の撤退時刻である。(5) 式の期待値を解くと、

$$V_i^M(x) = \begin{cases} -U_i & \text{if } x \leq X_i^M \\ a_i x^{\beta_2} + \frac{x M_i}{\rho - \alpha} - \frac{C_i}{\rho} & \text{if } x > X_i^M \end{cases} \quad (7)$$

$$X_i^M = \frac{\beta_2(\rho - \alpha)}{M_i(\beta_2 - 1)} \left(\frac{C_i}{\rho} - U_i \right) \quad (8)$$

となる。ただし、 a_i は適切な境界条件から解かれる未知定数、 β_2 は特性 2 次方程式

$$\frac{1}{2}\sigma^2\beta^2 + \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\beta - \rho = 0 \quad (9)$$

の負根である。また、企業 j が決して撤退しないという悲観的な状況における企業 i の最適撤退閾値を X_i^D と表すと、

$$X_i^D = \frac{\beta_2(\rho - \alpha)}{D_i(\beta_2 - 1)} \left(\frac{C_i}{\rho} - U_i\right) \quad (10)$$

が得られる。

4 均衡

ここで不完備情報を導入する。すなわち、企業 i にとって D_j, M_j, C_j, U_j のいずれかが非共有知識であるとする。企業 i はこれらの非共有知識について分布関数 $G_j(\tilde{X}_j)$ 、 $0 < \underline{X}_j \leq \tilde{X}_j \leq \bar{X}_j (< X_i^D)$ によって代表して予想するとする。ただし、 $\tilde{X}_i \in [X_i^M, X_i^D]$ は $S_i = (0, \tilde{X}_i]$ なる企業 i の撤退閾値である。また、 $G_j(\cdot)$ は $g_j(\cdot)$ に連続的に微分可能であると仮定する。 $\tilde{X}_i < \tilde{X}_j$ ならば企業 j が先に撤退するので、企業 i の価値関数は、

$$\begin{aligned} V_i^D(x, S) = & \Pr(\tilde{X}_j \leq \tilde{X}_i) \times \\ & \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau_i} (X_t D_i - C_i) e^{-\rho t} dt - U_i e^{-\rho \tau_i} \right] \\ & + \int_{\tilde{X}_i}^{\tilde{X}_j} \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau_j} (X_t D_i - C_i) e^{-\rho t} dt \right. \\ & \left. + V_i^M(X_{\tau_j}) e^{-\rho \tau_j} \right] g_j(\tilde{X}_j) d\tilde{X}_j \quad (11) \end{aligned}$$

となる。ここで (11) 式の右辺第 1 項、第 2 項の期待値をそれぞれ $A_i(x)$ 、 $B_i(x)$ とおくと、

$$A_i(x) = \begin{cases} -U_i & \text{if } x \leq \tilde{X}_i \\ b_i x^{\beta_2} + \frac{x D_i}{\rho - \alpha} - \frac{C_i}{\rho} & \text{if } x > \tilde{X}_i \end{cases} \quad (12)$$

$$B_i(x) = \begin{cases} V_i^M(x) & \text{if } x \leq \tilde{X}_j \\ c_i x^{\beta_2} + \frac{x D_i}{\rho - \alpha} - \frac{C_i}{\rho} & \text{if } x > \tilde{X}_j \end{cases} \quad (13)$$

となる。ただし、 b_i, c_i はそれぞれ適切な境界条件から解かれる未知定数である。したがって (11) 式は、

$$\begin{aligned} V_i^D(x, S) = & G_j(\tilde{X}_i) \times A_i(x) \\ & - \int_{\tilde{X}_j}^{\tilde{X}_i} B_i(x) g_j(\tilde{X}_j) d\tilde{X}_j \quad (14) \end{aligned}$$

と書き換えられる。(14) 式を最大化する 1 階の条件 $\partial V_i^D(x, S) / \partial \tilde{X}_i = 0$ は、

$$g_j(\tilde{X}_i) (A_i(x) - B_i(x)) + G_j(\tilde{X}_i) A_i'(x) = 0 \quad (15)$$

である。ただし、

$$\begin{aligned} A_i'(x) = & \frac{\partial A_i(x)}{\partial \tilde{X}_i} \\ = & \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq \tilde{X}_i \\ \left(\frac{\beta_2}{\tilde{X}_i} \left(U_i + \frac{\tilde{X}_i D_i}{\rho - \alpha} - \frac{C_i}{\rho} \right) - \frac{D_i}{\rho - \alpha} \right) \left(\frac{x}{\tilde{X}_i} \right)^{\beta_2} & \text{if } x > \tilde{X}_i \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

である。

命題 1 (15) 式を満たす $\tilde{X}_i = \hat{X}_i$ が、区間 $[X_i^M, X_i^D]$ 上に少なくとも 1 つ存在する。

命題 2 $\{S_1 = (0, \hat{X}_1], S_2 = (0, \hat{X}_2]\}$ はベイジアン均衡である。このとき、 $\hat{X}_i > \hat{X}_j$ なる企業 i が先に撤退し、どちらの企業が先に撤退するか予測できなくなることはない。

5 おわりに

本稿では、Murto [3] に不完備情報を導入し、その均衡概念を拡張した。これにより、情報不完備ゲームにおいても少なくとも 1 つ均衡が存在し、ギャップ均衡は存在し得ないことを示した。また本稿の結果は、Fudenberg and Tirole [1] に不確実性を導入し、解の一意性が保証されないことを示したということもできる。

参考文献

- [1] D. Fudenberg and J. Tirole: A theory of exit in duopoly. *Econometrica*, **54** (1986) 943-960.
- [2] B. Lambrecht and W. Perraudin: Real options and preemption under incomplete information. *Journal of Economic Dynamics and Control*, **27** (2003) 619-643.
- [3] P. Murto: Exit in duopoly under uncertainty. *RAND Journal of Economics*, **35** (2004) 111-127.