変分不等式と相補性問題に対するメリット関数
Merit Functions for Variational Inequality and Complementarity Problems

福島 雅夫　FUKUSHIMA Masao
奈良先端科学技術大学院大学　Nara Institute of Science and Technology

1. はじめに

変分不等式問題に対して, 等価な最適化問題を定式化することにより, それに基づく数値解法を構成したり, 与えられた点と解との隔たりを評価する指標であるいわゆるエラーバウンドを導く試みが近年非常に活発に行なわれている. 本稿では, 変分不等式問題とそのサブクラスである相補性問題に対するそのような試みを概観する.

変分不等式問題 (variational inequality problem, **VI**) は一般につぎのように書くことができる.

$$\text{Find } x \in S \text{ such that } \langle F(x), y-x\rangle \geq 0 \quad \forall y \in S$$

ここで, S は $\Re^n$ の閉凸部分集合, F は $\Re^n$ から $\Re^n$ への写像, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\Re^n$ の内積を表す. 変分不等式問題 VI において, 特に $S=\{x\in\Re^n \,|\, x_i\geq 0, i=1,\cdots,n\}$ のとき, 変分不等式問題は次の**相補性問題** (complementarity problem, **CP**) に帰着される.

$$F(x)\geq 0,\ \ x\geq 0,\ \ \langle F(x),x\rangle = 0$$

変分不等式問題および相補性問題に関する一般的な事柄は [3, 8, 14, 15] などを参照していただきたい.

2. 変分不等式のメリット関数

実数値関数 f の, ある集合 $X\subset\Re^n$ 上での大域的最小点の集合が, 変分不等式問題 VI の解集合に一致するとき, f を VI の**メリット関数** (merit function) という. (通常, 集合 X は S または R^n のいずれかである.) f が VI のメリット関数ならば, VI は次の等価な最適化問題に再定式化できる.

$$\text{minimize} \quad f(x) \quad \text{subject to} \quad x\in X$$

変分不等式に対するメリット関数 f は以下に述べるような "良い" 性質をもつことが望ましい.

1. f は微分可能である.
2. f の任意の停留点 (または局所的最小点) は大域的最小点である.
3. f の値を評価することにより, いま考えている点が解集合にどれくらい近いかを見積もることができる (エラーバウンド).

変分不等式問題 VI に対して最初に提案されたメリット関数は, Auslender [2] によって考察された**ギャップ関数** (gap function) と呼ばれる関数である.

$$g(x)=\max_{y\in S}\{\langle F(x),x-y\rangle\}$$

関数 g は集合 S が有界であれば任意の点において有限値をとるが, そうでないときには $g(x)=+\infty$ となる場合がある. ギャップ関数 g は以下の性質をもつ.

1. $g(x)\geq 0$ for all $x\in S$.
2. $g(x)=0 \iff x$ は VI の解

したがって, VI は最適化問題 $\min\{g(x)\,|\,x\in S\}$ と等価であるから, g は VI のメリット関数である. しかしながら, このギャップ関数 g には, すべての点で微分可能とは限らないという欠点がある.

一般の変分不等式問題に対して, 微分可能なメリット関数が存在するのかという問題は長く未解決の問題として残されていたが, 1989 年に Fukushima [6] と Auchmuty [1] によって独立に解決された. その関数は**正則化ギャップ関数** (regularized gap function)

とよばれ，次式で定義される．

$$f_\alpha(x)=\max_{y\in S}\left\{\langle F(x),x-y\rangle-\frac{\alpha}{2}\|y-x\|^2\right\}$$

ここで α は正のパラメータである．この関数はギャップ関数 g と異なり，集合 S が有界でない場合でも，常に有限の値をとる．

正則化ギャップ関数 f_α は，ギャップ関数 g と同様，つぎの性質をもつ．

1. $f_\alpha(x)\ge 0$ for all $x\in S$.

2. $f_\alpha(x)=0 \Longleftrightarrow x$ は VI の解

したがって VI は最適化問題 $\min\{f_\alpha(x)\,|\,x\in S\}$ と等価であるから，f_α は VI のメリット関数である．正則化ギャップ関数 f_α の長所は，写像 F が微分可能であれば f_α もまた微分可能となることである．さらに，Fukushima [6] は写像 F のヤコビ行列 $\nabla F(x)$ が正定値ならば，上の最適化問題の停留点（1次の最適性条件を満たす点）は必ず大域的最適解（すなわち VI の解）となることを示した．さらに，[6, 21, 11] は関数 f_α およびその拡張に対する降下法を提案し，その大域的収束性を示した．

また，Taji, Fukushima and Ibaraki [16] は F が（係数 $\mu>0$ で）強単調[1] で，さらに $\alpha<2\mu$ ならば，次式のエラーバウンドが成り立つことを示した．(ただし，x^* は VI の（唯一の）解を表す.)

$$f_\alpha(x)\ge\left(\mu-\frac{\alpha}{2}\right)\|x-x^*\|^2 \quad \text{for all } x\in S$$

さらに，[16] は関数 f_α に対するニュートン法を提案し，その大域的収束性と2次収束性を示した．

定義より，正則化ギャップ関数 f_α の値を評価するには，集合 S 上への射影を計算する必要がある．S が単純な集合のときは問題ないが，一般に射影の計算は容易ではない．最近，Taji and Fukushima[17, 18] は，集合 S が不等式制約式

$$S=\{x\,|\,c_i(x)\le 0,\ i=1,\cdots,m\}$$

で与えられる問題に対して，正則化ギャップ関数を修正した関数

$$\tilde f_\alpha(x)=\max_{y\in T(x)}\left\{\langle F(x),x-y\rangle-\frac{\alpha}{2}\|y-x\|^2\right\}$$

を考え，この関数が VI に対するメリット関数となることを示した．ここで，$T(x)$ は次式で定義される集合 S の点 x における線形近似集合である．

$$T(x)=\{y\,|\,c_i(x)+\langle\nabla c_i(x),y-x\rangle\le 0,\ i=1,\cdots,m\}$$

関数 $\tilde f_\alpha$ は微分可能とは限らないが，任意の点で方向微分可能であり，この関数に基づく降下法とニュートン法が提案されている [17, 18].

上で紹介した VI に等価な最適化問題はいずれも実行可能領域 S 上でメリット関数を最小化するものであった．一般の VI と等価な制約なし最適化問題はこれまで知られていなかったが，最近 Yamashita and Fukushima [23] は（正則化）ギャップ関数などの関数に対してさらに Moreau-Yosida 正則化の考え方を用いることにより，等価な制約なし最適化問題が得られ，それに基づくエラーバウンドの導出が可能であることを示した．

3. 相補性問題のメリット関数

この節ではつぎの相補性問題 CP を考える．

$$F(x)\ge 0,\quad x\ge 0,\quad \langle F(x),x\rangle=0$$

前節で述べたように，CP は VI の特別な場合になっているので，VI のメリット関数を直接 CP に用いることができる．特に，VI に対する正則化ギャップ関数 f_α を CP に特殊化すると次の関数が得られる．

$$f_\alpha(x)=\langle F(x),x\rangle+\frac{\alpha}{2}\left(\|[x-\frac{1}{\alpha}F(x)]_+\|^2-\|x\|^2\right)$$

[1] 写像 $F:\Re^n\to\Re^n$ は

$$\langle F(x)-F(x'),x-x'\rangle\ge 0 \qquad \forall x,x'\in\Re^n$$

を満たすとき**単調** (monotone),

$$\langle F(x)-F(x'),x-x'\rangle> 0 \qquad \forall x,x'\in\Re^n\ (x\ne x')$$

を満たすとき**狭義単調** (strictly monotone),

$$\langle F(x)-F(x'),x-x'\rangle>\mu\|x-x'\|^2 \qquad \forall x,x'\in\Re^n$$

を満たすとき（係数 μ で）**強単調** (strongly monotone with modulus μ) であるという．特に，ヤコビ行列 $\nabla F(x)$ がすべての x において正定値ならば F は狭義単調である．

ここで, $[z]_+$ は $\max(z_i, 0), i = 1, \cdots, n$, を要素とするベクトルを表す. 前節に示した結果より, CP は最適化問題 $\min\{ f_\alpha(x) \mid x \geq 0 \}$ と等価である. 当然ながら, VI に対する正則化ギャップ関数に対して得られている結果はそのまま CP に対する正則化ギャップ関数に対しても成立する.

最近 Mangasarian and Solodov [13] は相補性問題 CP に対して次の**陰ラグランジュ関数** (implicit Lagrangian) とよばれるメリット関数を提案した.

$$M_\alpha(x) = \langle F(x), x \rangle + \frac{1}{2\alpha} \left(\|[x - \alpha F(x)]_+\|^2 - \|x\|^2 + \|[F(x) - \alpha x]_+\|^2 - \|F(x)\|^2 \right)$$

ここで, α はパラメータであり, $\alpha > 1$ とする. 陰ラグランジュ関数は以下の性質をもつ [13].

1. $M_\alpha(x) \geq 0$ for all $x \in R^n$
2. $M_\alpha(x) = 0 \iff x$ は CP の解

したがって, CP は最適化問題 $\min\{ M_\alpha(x) \mid x \in \Re^n \}$ と等価であり, M_α は CP のメリット関数である. 正則化ラグランジュ関数を用いた等価な最適化問題が制約条件 $x \geq 0$ を含むのに対して, 陰ラグランジュ関数を用いた最適化問題は制約のない問題となる.

正則化ラグランジュ関数と同様, F が微分可能であれば陰ラグランジュ関数 M_α も微分可能であるが, さらに Yamashita and Fukushima [22] は $\nabla F(x)$ が正定値ならば 関数 M_α の停留点 x ($M_\alpha(x) = 0$ となる点 x) は CP の解であることを示した. また, エラーバウンドに関しては, X^* を CP の解集合としたとき, Luo ら [12] によって

$$M_\alpha(x) \geq \kappa \operatorname{dist}(x, X^*)^2 \text{ for all } x : M_\alpha(x) \leq \delta$$

を満たす $\kappa > 0$ と $\delta > 0$ の存在が示された. さらに, Yamashita and Fukushima [22] は, F が強単調でリプシッツ連続ならば, ある定数 $\kappa > 0$ に対して

$$M_\alpha(x) \geq \kappa \| x - x^* \|^2 \quad \text{for all } x \in \Re^n$$

が成り立つことを示した. ただし x^* は CP の唯一の解を表す.

相補性問題 CP に対して最近活発に研究されているメリット関数に次の関数がある.

$$\Psi(x) = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i, F_i(x))$$

ここで, $\varphi : \Re^2 \to \Re$ は次式で定義される関数である.

$$\varphi(a, b) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{a^2 + b^2} - a - b \right)^2$$

これは最初 Fischer [5] によって提案されたものであり, その後 [7, 9, 19, 4] らによってさまざまな性質が研究されている. 容易に分かるように, 関数 φ は

$$\varphi(a, b) = 0 \iff a \geq 0,\ b \geq 0,\ ab = 0$$

を満たすので, 制約なし最適化問題 $\min\{\Psi(x) \mid x \in \Re^n\}$ は CP と等価である. また, 関数 φ は微分可能である. さらに, F が単調写像または P_0-関数[2]ならば, 関数 Ψ の任意の停留点は CP の解である [7, 4]. これらは, 正則化ギャップ関数や陰ラグランジュ関数の場合の条件よりも弱い条件である.

4. おわりに

本稿では, 変分不等式問題・相補性問題に対するメリット関数に関する最近の成果を概観した. これらの問題に対してはさらに現在新しい結果が次々と得られつつあり, 活発な研究が行われている. 特に, 相補性問題 CP を一般化した問題

$$F(x) \geq 0, \quad G(x) \geq 0, \quad \langle F(x), G(x) \rangle = 0$$

(ただし $F : \Re^n \to \Re^n, G : \Re^n \to \Re^n$) に対して, 正則化ギャップ関数 f_α と陰ラグランジュ関数 M_α を統一的に導出し, さらに CP に対して得られているそれらの性質を一般化する試み [20] や, 前節で述べた CP に対するメリット関数 Ψ を拡張する試み [10] なども行われている.

[2] 写像 F は, $x \neq y$ なる任意の x, y に対して, 常に $x_i \neq y_i$ かつ $(x_i - y_i)(F_i(x) - F_i(y)) > 0$ を満たす i が存在するとき, P_0-関数であるという. 単調写像のクラスは P_0-関数を含む.

参考文献

[1] G. Auchmuty, Variational Principles for Variational Inequalities, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 10 (1989), 863–874.

[2] A. Auslender, *Optimisation: Méthodes Numériques*, Masson, Paris, 1976.

[3] R. W. Cottle, J.-S. Pang and R. E. Stone, *The Linear Complementarity Problem*, Academic Press, San Diego, 1992.

[4] F. Facchinei and J. Soares, A New Merit Function for Nonlinear Complementarity Problems and a Related Algorithm, Technical Report, Dipartimento di Informatica e Sistemistica, Università di Roma "La Sapienza", Rome, Italy (December 1994).

[5] A. Fischer, A Special Newton-type Optimization Method, *Optimization*, 24 (1992), 269–284.

[6] M. Fukushima, Equivalent Differentiable Optimization Problems and Descent Methods for Asymmetric Variational Inequality Problems, *Mathematical Programming*, 53 (1992), 99–110.

[7] C. Geiger and C. Kanzow, On the Resolution of Monotone Complementarity Problems, Preprint 82, Institut für Angewandten Mathematik, Universität Hamburg, Hamburg, Germany (April 1994).

[8] P. T. Harker and J.-S. Pang, Finite-Dimensional Variational Inequality and Nonlinear Complementarity Problems: A Survey of Theory, Algorithms and Applications, *Mathematical Programming*, 48 (1990), 161–220.

[9] C. Kanzow, Nonlinear Complementarity as Unconstrained Optimization, to appear in *Journal of Optimization Theory and Applications.*

[10] C. Kanzow and M. Fukushima, Equivalence of the Generalized Complementarity Problem to Differentiable Unconstrained Minimization, Technical Report, Nara Institute of Science and Technology, Nara, Japan (January 1995).

[11] T. Larsson and M. Patriksson, A Class of Gap Functions for Variational Inequalities, *Mathematical Programming*, 64 (1994), 53–79.

[12] Z.-Q. Luo, O. L. Mangasarian, J. Ren and M. V. Solodov, New Error Bounds for the Linear Complementarity Problem, to appear in *Mathematics of Operations Research.*

[13] O. L. Mangasarian and M. V. Solodov, Nonlinear Complementarity as Unconstrained and Constrained Minimization, *Mathematical Programming*, 62 (1993), 277–297.

[14] A. Nagurney, *Network Economics: A Variational Inequality Approach*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1993.

[15] J.-S. Pang, Complementarity Problems, in *Handbook on Global Optimization*, Edited by R. Horst and P. Pardalos, Kluwer Academic Publishers, 1994.

[16] K. Taji, M. Fukushima and T. Ibaraki, A Globally Convergent Newton Method for Solving Strongly Monotone Variational Inequalities, *Mathematical Programming*, 58 (1993), 369–383.

[17] K. Taji and M. Fukushima, A New Merit Function and a Successive Quadratic Programming Algorithm for Variational Inequality Problems, TR-IS-94013, Nara Institute of Science and Technology, Nara, Japan (June 1994).

[18] K. Taji and M. Fukushima, A Globally Convergent Newton Method for Solving Variational Inequality Problems with Inequality Constraints, to appear in *Recent Advances in Nonsmooth Optimization*, Edited by D.-Z. Du, L. Qi and R. S. Womersley, World Scientific Publishers, 1995.

[19] P. Tseng, Growth Behaviour of a Class of Merit Functions for the Nonlinear Complementarity Problem, Technical Report, Department of Mathematics, University of Washington, Seattle (May 1994).

[20] P. Tseng, N. Yamashita and M. Fukushima, Equivalence of Complementarity Problems to Differentiable Minimization: A Unified Approach, to appear in *SIAM Journal on Optimization.*

[21] J. H. Wu, M. Florian and P. Marcotte, A General Descent Framework for the Monotone Variational Inequality Problem, *Mathematical Programming*, 61 (1993), 281–300.

[22] N. Yamashita and M. Fukushima, On Stationary Points of the Implicit Lagrangian for Nonlinear Complementarity Problems, to appear in *Journal of Optimization Theory and Applications.*

[23] N. Yamashita and M. Fukushima, Equivalent Unconstrained Minimization and Global Error Bounds for Variational Inequality Problems, TR-IS-94034, Nara Institute of Science and Technology, Nara, Japan (November 1994).