# 多目的線型計画問題における有効端点の全列挙法*

02501760　防衛大学校情報工学科　・二川真由美　FUTAKAWA Mayumi
01700900　防衛大学校情報工学科　山田武夫　YAMADA Takeo
01107880　防衛大学校情報工学科　片岡靖詞　KATAOKA Seiji

## 1　はじめに

多目的線形計画問題 [1] は

$$MOLP: \left| \begin{array}{ll} \text{Min} & z = Cx \\ \text{s.t.} & Ax = b \end{array} \right.$$

で与えられる。ここに、$A, b, C$はそれぞれ$m \times n$, $m \times 1$, $k \times n$ の定数行列で、$x$, $z$はサイズ$n$, $k$の未知ベクトルである。また、$X := \{x \in R^n | Ax = b\}$, $Z := \{z = Cx \in R^k | x \in X\}$ は共に空でない有界凸集合と仮定する。

$C$の第$i$行を$c_i$とし、問題

$$LP_i: \left| \begin{array}{ll} \text{Min} & z_i = c_i x \\ \text{s.t.} & Ax = b \end{array} \right.$$

の最適関数値を$\underline{z}_i$とすると、任意の$z \in Z$に対し、$z_i \geq \underline{z}_i$が成立する。そこで、一般性を失うことなく$\underline{z}_i = 0$としてよい。

$z, z' \in Z$について、$z'$が$z$に優越するとは$z'_i \leq z_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$が成り立つことをいい、$z' \leq z$と記す。$z \in Z$が有効であるとは、$z$に優越する$z' \in Z$が存在しないことをいう。$Z$の有効端点 (efficient extreme point: EEP) を全て列挙するアルゴリズムはいくつか知られている [2][3][4] が、本稿ではプログラム化が極めて容易な再帰型アルゴリズムを提示し、その応用を考える。

## 2　理論

$R^k_+$における一次独立なベクトルの集合$z^1, z^2, \ldots, z^k$に対し、単体$\Delta(O, z^1, z^2, \ldots, z^k) := \{\sum_{i=1}^k \rho_i z^i \mid \sum_{i=1}^k \rho_i \leq 1,\ \rho_i \geq 0\}$ を考える。$U := (z^1, \ldots, z^k)$に対し、$u := 1U^{-1}$とすると、$w := uz$は$z = z^i$で$w = 1$をとる $(i = 1, \ldots, k)$。ただし、$1$ は全成分が 1 の横ベクトルである。ここで、線形計画問題

$$LP(u): \left| \begin{array}{ll} \text{Min} & uz \\ \text{s.t.} & z = Cx,\ Ax = b \end{array} \right.$$

の最適解を $(x^*, z^*)$、そのときの目的関数値を $w^*$とすると、次が成立する。

命題 (i) $w^* \leq 1$.

(ii) $w^* < 1$ のとき、$z^*$は$Z$の有効端点である。

(iii) $w^* = 1$ のとき、$\Delta(O, z^1, z^2, \ldots, z^k)$ 内の有効端点は $z^1, z^2, \ldots, z^k$のみである。

証明 (i),(iii) 明らか。(ii) 単体$\Delta(z^1, z^2, \ldots, z^k)$ の内部の点$z^0$がこの単体内で有効でなければ、単体内に$z' \leq z^0$が存在する。ここで、$\cos(z' - z^0, z^j - z^i) > 0$ であるような$z^i$をとれば、$z^i$は有効でなくなり、仮定に反するので、$z^0$は有効で、$\Delta(z^1, z^2, \ldots, z^k)$ と錘$\Delta^-(z^0)$ はこの単体を含む平面で分離される。ここに、$\Delta^-(z^0) := \{z | z \leq z^0\}$。従って、$z^*$で$Z$と$\Delta^-(z^*)$ が分離されるので$z^*$は有効である。 ∎

## 3　再帰型アルゴリズム

$z^1, z^2, \ldots, z^k \in Z$が有効端点であるとして、前節の方法により$\Delta(O, z^1, \ldots, z^k)$ に含まれる他の端点$z^*$を見つける手続きを次の通りとする。

```
function NEW_EEP(z^1, z^2, ..., z^k);
  begin
     u := 1U^{-1};
     SOLVE_LP(u);
     if w* < 1 then NEW_EEP := z*
     else    NEW_EEP := ∅;
  end.
```

ここにSOLVE_LP$(u)$ は$LP(u)$ を解いて $(z^*, w^*)$ を算出する手続きである。これによって単体$\Delta(O, z^1, \ldots, z^k)$内部に新たな有効端点　$z^*$が求まると、この単体を$\Delta(O, z^*, z^2, \ldots, z^k)$, ..., $\Delta(O, z^1, \ldots, z^{k-1}, z^*)$, $\Delta(z^*, z^1, \ldots, z^k)$ の$k+1$個の単体に細分割することが出来る。このうち、$\Delta(z^*, z^1, \ldots, z^k)$ 内には有効端点は存在しないので、$\Delta(O, z^1, z^2, \ldots, z^k)$ 内の有効端点を

*OR 学会春季大会, (広島修道大学 1995.3.27-28)

求めるためには、残りの$k$個の単体内のすべての有効端点を求めればよい。そこで、単体$\Delta(z^1, z^2, \ldots, z^k)$内のすべての有効端点を求めるアルゴリズムを再帰的に次のように書くことが出来る。

**procedure** FIND_ALL_EEP($z^1, z^2, \ldots, z^k$);
  **begin**
    $z^* :=$ NEW_EEP($z^1, z^2, \ldots, z^k$);
    **if** ($z^* \neq \phi$) **then**
      **begin**
        **output** $z^*$;
        FIND_ALL_EEP($z^*, z^2, \ldots, z^k$);
        FIND_ALL_EEP($z^1, z^*, \ldots, z^k$);
        ⋮
        FIND_ALL_EEP($z^1, z^2, \ldots, z^*$);
      **end**
  **end**.

このアルゴリズムの初期値としては、$Z$のすべての有効端点を含むような単体を取れば良いので、$z_0^i = Me_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$とする。ここに、$e_i$は第$i$単位ベクトル、$M$は十分に大きい正数である。

# 4 応用

グラフ$G = (V, E)$を$k$重の荷重$z : E \longrightarrow R_+^k$が与えられた連結な無向グラフとし、任意の全域木$T$の($k$重の)荷重を$z(T) \in R_+^k$とする。全域木$T$が$T'$に優越するとは$z(T) \leq z(T')$となることをいい、有効全域木とは優越する全域木がないものをさす。有効全域木をすべて列挙するには、前節の手続きNEW_EEPを以下のように修正すればよい。すなわち、グラフ$G$の$k$次元の荷重を$u$を重みとして一次元化した荷重付グラフについて最小全域木を求めるアルゴリズムをSOLVE_MST(u)とし、これをSOLVE_LP($u$)と置き換えれば十分である。

# 5 数値例

図1のグラフで、二点間の二種類の距離として$x$座標、$y$座標の絶対偏差をとった二重加重グラフについて、上述のアルゴリズムを適用する。初期解は$u$を$(1, 0)$, $(0, 1)$とすることにより、図2のA点およびB点となる。これらに対しNEW_EEPを適用すると、点Cが得られる。次に、点A,Cを用いて点Dが、点B,CからEが得られ、以下同様に繰り返すと図2に示すように、14個の有効全域木が得られる。(ちなみに、このグラフ中の全域木の総数は14,519,430,554である。)

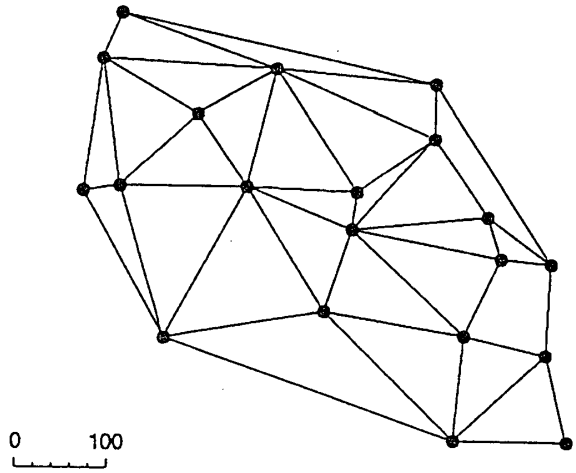


図1. 例題

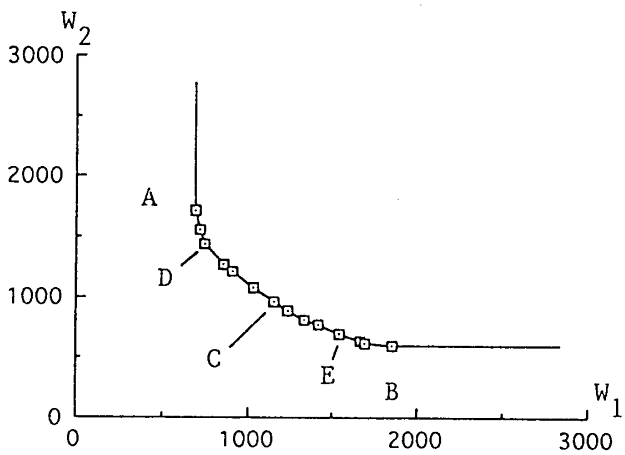


図2. 有効全域木

# 参考文献

[1] C.-L. Hwang, A.S.M. Masud, *Multiple Objective Decision Making: Methods and Applications*, Springer, 1979.

[2] J.G. Ecker, I.A. Kouada, *Math. Prog.*, **14**(1978), 249.

[3] J.P.Dauer, Y.-H. Liu, *Euro. J. Operational Research*, 46(1990), 350.

[4] J.P.Dauer, O.A. Salah, *ibid.*, 46(1990), 358.