変分不等式に対するニュートン法

奈良先端科学技術大学院大学　*田地　宏一　TAJI Kouichi
福島　雅夫　FUKUSHIMA Masao

1 はじめに

SをR^nの空でない閉凸部分集合, FをR^nから それ自身への連続写像とする. このとき, 次式を満た す$x^* \in S$を求める問題を変分不等式問題という.

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \ {}^\forall x \in S. \qquad (1)$$

変分不等式問題の解法として, ニュートン法, 射影法, 線形化ヤコビ法など多くの反復解法が提案されている. その中で, ニュートン法は各反復において, 次の線形化された変分不等式を解くことにより点列$\{x^k\}$を生成する.

$$\langle F(x^k) + \nabla F(x^k)^T (x^{k+1} - x^k), x - x^{k+1} \rangle \geq 0 \quad {}^\forall x \in S. \qquad (2)$$

適当な仮定の下で, ニュートン法は局所的に二次収束することが示されている. 一方, 変分不等式に対して, gap 関数に代表されるいくつかの評価関数が提案されており, それらに対する直線探索を組み合わせた大域的収束性を持つニュートン法が提案されている [1, 2]. ところが, それらの方法は, 集合Sが例えば凸多面体といった簡単な構造を持つことを暗に仮定している. 実際, 一般の凸集合Sに対しては, (2) の解を求めることは必ずしも容易ではない.

ここでは, 大域的に収束する新しいニュートン法を提案する. 提案する方法は, 各反復において写像Fだけでなく集合Sも線形化した線形の変分不等式を解く. さらに, 最近著者によって提案された評価関数を用いることにより, この方法が大域的に収束することを示す. また, 適当な仮定の下で, その収束率が超一次であることを示す.

2 方向微分可能な評価関数

この節では, 最近著者 [3] によって提案された, 変分不等式問題 (1) に対する方向微分可能な評価関数と, その性質について述べる. 以下では, 写像Fは連続的微分可能であり, 集合Sは2階連続的微分可能な凸関数$c_i : R^n \to R$を用いて,

$$S = \{x \mid c_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m\}$$

と表されるものと仮定する. さらに, Slater の制約想定が満たされると仮定する.

まず, 与えられた点$x \in R^n$に対し, 集合$T(x)$を次のように定義する.

$$T(x) = \{y \mid c_i(x) + \langle \nabla c_i(x), y - x \rangle \leq 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m\}.$$

この$T(x)$を用いて関数$f : R^n \to R$を次式で定義する.

$$f(x) = -\langle F(x), H(x) - x \rangle - \frac{1}{2} \langle H(x) - x, G(H(x) - x) \rangle$$

ここに, Gは$n \times n$正定値対称行列, また$H(x)$は次の二次計画問題の唯一の解である.

$$\begin{array}{ll} \text{minimize}_{\ y} & \frac{1}{2}\langle y - x, G(y - x) \rangle + \langle F(x), y - x \rangle \\ \text{subject to} & y \in T(x). \end{array}$$

さらに, この二次計画問題の最適なラグランジュ乗数の集合を$\Lambda(x)$と書くことにする.

関数fを用いると, 変分不等式問題 (1) と等価な最適化問題を構成することができる.

定理 2.1 [3] すべての$x \in S$に対し$f(x) \geq 0$が成り立つ. また, $x \in S$において$f(x) = 0$となるのは, xが問題 (1) の解であるときであり, またそのときに限る. 従って, 問題 (1) は次の最適化問題と等価である.

$$\text{minimize} \ \ f(x) \ \ \text{subject to} \ \ x \in S. \qquad (3)$$

関数fは必ずしも微分可能ではないが, 方向微係数は常に存在する.

定理 2.2 [3] 関数fは方向微分可能であり, その方向微係数は

$$f'(x; d) = \min_{\lambda \in \Lambda(x)} \langle F(x) - [M(x, \lambda) - G](H(x) - x), d \rangle$$

で与えられる．ただし，

$$M(x,\lambda)=\nabla F(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\nabla^2 c_i(x)$$

である．

注意 2.1 もし，集合$\Lambda(x)$の要素が唯一つならば，関数fは点xにおいて微分可能である．

3 大域的に収束するニュートン法

この節では，変分不等式に対する大域的収束性を持つニュートン法を提案する．この方法は，ペナルティ関数

$$\theta_r(x)=f(x)+r\sum_{i=1}^{m}\max(0,c_i(x))$$

に Armijo 型直線探索を組み合わせたものである．また，以下では写像Fは係数$\mu>0$で強単調，すなわち

$$\langle F(x)-F(y),x-y\rangle\geq\mu\parallel x-y\parallel^2\quad{}^{\forall}x,y\in R^n$$

を満たすものと仮定する．

アルゴリズム

Step 0 初期点x^0，パラメータ$r>0$, $0<\beta<1$, $0<\sigma<1$，および正定値対称行列Gを選ぶ．

Step 1 線形変分不等式

$$\langle F(x^k)+M(x^k,\bar{\lambda}^k)^T(\bar{x}^k-x^k),x-\bar{x}^k\rangle\geq 0\quad{}^{\forall}x\in T(x^k),$$

の解$\bar{x}^k\in T(x^k)$を求め$d^k:=\bar{x}^k-x^k$とおく．ただし$\bar{\lambda}^k$は$\Lambda(x^k)$の任意のベクトル．

Step 2 $x^{k+1}:=x^k+\beta^{m_k}d^k$とおく．ただし$m_k$は

$$\theta_r(x^k)-\theta_r(x^k+\beta^m d^k)\geq-\sigma\beta^m\theta_r'(x^k;d^k)$$

を満たす最小の非負の整数. Step 1 に戻る．

このアルゴリズムに対して，以下の定理が成り立つ．

定理 3.1 [4] 写像Fは連続的微分可能かつ係数μで強単調であると仮定する．また，定数$r>0$は十分大きいものと仮定する．もし，行列Gが$\|G\|<2\mu$を満たし，点列$\{x^k\}$が有界であれば，上のアルゴリズムの生成する点列は問題(1)の(唯一の)解に収束する．

定理 3.2 [4] 定理3.1の仮定が満たされているものとする．さらに，(1)の唯一の解x^*において狭義相補性および一次独立制約想定が満たされていると仮定する．もし，ある整数$\bar{k}$が存在し，アルゴリズムの Step 2 においてすべての$k\geq\bar{k}$に対し単位ステップサイズが許容されるならば，アルゴリズムが生成する点列$\{x^k\}$は解x^*に超一次収束する．

参考文献

[1] P. Marcotte and J. P. Dussault, "A Note on a Globally Convergent Newton Method for Solving Variational Inequalities," *Operations Research Letters* 6 (1987) 35-42.

[2] K. Taji, M. Fukushima and T. Ibaraki, "A Globally Convergent Newton Method for Solving Strongly Monotone Variational Inequalities," *Mathematical Programming* 58 (1993) 369-383.

[3] K. Taji and M. Fukushima, "A New Merit Function and a Successive Quadratic Programming Algorithm for Variational Inequality Problems," Technical Report NAIST-IS-TR94013, Graduate School of Information Science, Nara Institute of Science and Technology (Nara, Japan, 1994).

[4] K. Taji and M. Fukushima, "A Globally Convergent Newton Method for Solving Variational Inequality Problems with Inequality Constraints," Technical Report NAIST-IS-TR94029, Graduate School of Information Science, Nara Institute of Science and Technology (Nara, Japan, 1994).