1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

DEA におけるクロス効率値を用いた評価法

01505910 慶應義塾大学 枇々木 規雄 HIBIKI Norio

1. はじめに

DEA は多入力・多出力系システムにおける相対的な効率性を評価する手法である。DEA における効率性を評価するのに、自分に都合良くだけでなく、他からの評価も利用したい場合にクロス効率値が用いられる。出力値を Y_{rj}、入力値を X_{ij} とすると、対象が DMU a のときの出力および入力のウェイト u^*_{ra}, v^*_{ia} を用いた DMU j のクロス効率値 η_{ja} は次の (1) 式で示される。

$$\eta_{ja} = \left(\sum_{r=1}^{k} Y_{rj} \cdot u^*_{ra}\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \cdot v^*_{ia}\right) \quad (1)$$

$$(a = 1, \ldots, n\,,\, j = 1, \ldots, n)$$

本研究では、クロス効率値を用いた評価法について考察を行う。まず、修正クロス効率値を一つに決める方法を示す。そして、クロス効率値を用いた評価をより広く利用するために、平均クロス効率値以外の方法として、加重平均クロス効率値、満足度、調整済満足度、幾何平均値、最大値、最小値の 6 つの方法を示し、数値例を用いて、比較・検討する。さらに、DMU の非効率性を評価する方法である山田ら [5] の Inverted DEA に対するクロス非効率値 (Inverted DEA Cross-Inefficiency：以降、IDEA クロス非効率値) を定義し、検討する。また、DEA の問題を解いたときに、端点として得られる可能性のある入出力項目に対するウェイト解を求め、それらで計算される効率値についても調べる。

2. 修正クロス効率値を一つに決める方法

枇々木 [2] はクロス効率値に関する任意性と不公平性の問題を解決するために修正クロス効率値を示した。その取り得る範囲から修正クロス効率値を一つに決める方法として、最小値、最大値、満足度、調整済満足度、ウェイトの平均、算術平均値、幾何平均値を使った基準を示す。これによって、一意に決められた (修正) クロス効率値を求めることができる。

3. クロス効率値を用いた評価法

3.1 加重平均クロス効率値による評価法

平均クロス効率値をより一般化して、重み w_a を掛けた加重平均クロス効率値 η^E_j により、DMU j を評価する方法を示す。

$$\eta^E_j = \sum_{a=1}^{n} \eta_{ja} \cdot w_a\,,\, (j = 1, \ldots, n) \quad (2)$$

単純な平均では他の DMU から付けられた評価をすべて同じく扱う ($\frac{1}{n}$ 倍する) のに対し、この方法は各 DMU a の意思を重みに反映させることができる。重み w_a を決める方法として、DMU j それぞれの加重平均クロス効率値ができるだけ大きくなるように決める方法 (効率値最大化法) を示す。これは次の多目的計画問題に定式化できる。ただし、重み w_a の合計は 1 という制約を置く。

$$\max \quad \sum_{a=1}^{n} \eta_{ja} \cdot w_a\,,\, (j = 1, \ldots, n) \quad (3)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{a=1}^{n} w_a = 1 \quad (4)$$

$$w_a \geq 0\,,\, (a = 1, \ldots, n) \quad (5)$$

この多目的計画問題に対する一つのアプローチとして、n 個の目的関数をすべて等加重で加え、さらに (8) 式で示すような重み w_a を加重平均クロス効率値 (各 DMU j に対する評価値) に依存して決めるという条件を付ける方法 (条件付き等加重平均効率値最大化法) を示す。これは、DMU に対する評価を重みに反映させることによって多目的に対して妥協 (合意) する一つの方法 (基準) と考えることができる。

$$\max \quad \sum_{a=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \eta_{ja}\right) \cdot w_a \quad (6)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{a=1}^{n} w_a = 1 \quad (7)$$

$$\sum_{a=1}^{n} \eta_{ja} \cdot w_a = \lambda \cdot w_j\,,\, (j = 1, \ldots, n) \quad (8)$$

$$w_a \geq 0\,,\, (a = 1, \ldots, n) \quad (9)$$

この方法は杉山ら [3] が示した固有ベクトルから DMU の重要度を計算する方法と等価であることを示す。(8) 式は、クロス効率性行列 $H = [\eta_{jp}]$ の固有値問題として、次の (10) 式で表すことができる。

$$H\boldsymbol{w} = \lambda \boldsymbol{w} \quad (10)$$

ここで、λ は固有値を表す。さらに、(10) 式に左から要素がすべて 1 の横ベクトル $(1, \cdots, 1)$ を掛け、(7) 式の条件を加えると次の (11) 式が導かれる。

$$\sum_{a=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \eta_{ja}\right) \cdot w_a = \lambda \cdot \sum_{a=1}^{n} w_a = \lambda \quad (11)$$

(11) 式を用いると、目的関数 (6) 式は、

$$\max \quad \lambda \quad (12)$$

となり、重みは (7) 式の条件のもとで (10) 式に示す固有値問題を解いたときに得られる最大固有値に対する固有ベクトル w^*_a として求めることができる。求められた加重平均クロス効率値 $\sum_{a=1}^{n} \eta_{ja} \cdot w^*_a$ は、(8) 式より $\lambda \cdot w^*_j$ となる。したがって、この方法は、杉山ら [3] が

示す固有ベクトルからDMUの重要度を計算する方法に相応すると解釈できる。逆に言えば、固有ベクトルによってDMUの重要度を算出するのは、その背後にこれらの考え方が潜んでいると考えることができる。

3.2 満足度を用いた評価法

(1) 満足度均等化法による評価法

(13) 式で計算する値 d_j を取り得るクロス効率値の最大値 η_j^U と最小値 η_j^L を用いることによって基準化した0から1の値をとる満足度と考える。

$$d_j = \frac{\eta_j^R - \eta_j^L}{\eta_j^U - \eta_j^L}, (j = 1, \ldots, n) \tag{13}$$

これは、各DMUの満足度 d_j を同じにするクロス効率値による評価値 η_j^R を用いる方法である。

(2) 調整済満足度均等化法による評価法

クロス効率値として得られた n 個の値をそれぞれ評価値に反映させるために、各DMU毎に (14) 式に示す評価関数 $f_j(\eta_j^R)$ を定義する。

$$f_j(\eta_j^R) = \frac{1}{n-1} \cdot \left\{ \frac{\eta_j^R - \eta_j^l}{\eta_j^{l+1} - \eta_j^l} + (l-1) \right\} \tag{14}$$

$$(\eta_j^l \leq \eta_j^R \leq \eta_j^{l+1}, \ l = 1, \ldots, n-1)$$

ここで、η_j^k は $\eta_{ja}(a = 1, \ldots, n)$ を小さい順に並べた k 番目の値である。そして、この評価関数で得られた値を調整済満足度とする。この調整済満足度 $f_j(\eta_j^R)$ の値を決める (与える) ことによって、クロス効率値による評価値 η_j^R を決めることができる。調整済満足度が0のときは、クロス効率値の最小値、1のときは最大値をとることになる。また、0.5のときは中央値になる。

4. 数値実験による考察

- データとして、刀根 [4] の図書館データの一部 (東京23区中, 人口の少ない順に11区) を用いる。

【結果】表1参照 (詳しい結果については当日示す。)

表1：クロス効率値による評価値

	最小値	最大値	満足度	算術平均値	幾何平均値	条件付加重平均	調整済満足度
千代田区	0.089	0.352	0.221	0.231	0.221	0.216	0.235
中央区	0.221	0.896	0.559	0.503	0.460	0.460	0.395
台東区	0.274	0.630	0.452	0.434	0.422	0.417	0.431
荒川区	0.432	0.751	0.592	0.587	0.579	0.567	0.600
港区	0.217	1.000	0.609	0.812	0.748	0.757	1.000
文京区	0.464	1.000	0.732	0.858	0.839	0.826	0.919
墨田区	0.440	0.743	0.592	0.567	0.561	0.549	0.542
渋谷区	0.234	0.697	0.466	0.509	0.485	0.478	0.541
目黒区	0.718	1.000	0.859	0.957	0.952	0.941	1.000
豊島区	0.436	0.816	0.626	0.653	0.637	0.626	0.629
新宿区	0.272	0.669	0.471	0.540	0.523	0.512	0.558

※ 満足度、調整済満足度はそれぞれ0.5の値

5. IDEAとそのクロス非効率値

IDEAクロス非効率値 δ_{ja} を次の (15) 式で定義する。

$$\delta_{ja} = \left(\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \cdot v_{ia}^{I*} \right) \Big/ \left(\sum_{r=1}^{k} Y_{rj} \cdot u_{ra}^{I*} \right) \tag{15}$$

$$(a = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, n)$$

u_{ra}^{I*}, v_{ia}^{I*} はIDEAを解いたときのウェイトを表す。

6. 端点毎のウェイトを利用した効率値

DEAでDMUを評価する場合の解の候補について検討する。θ_j^q を効率値とすると、次の (16)〜(18) 式を満たすウェイト u_r^q, v_i^q の組み合わせおよびそれによって計算される θ_j^q がDMU j の q 番目の解の候補となる。

$$\max_k \ \theta_k^q = 1, (k \in E) \tag{16}$$

$$\theta_k^q \leq 1, (k \in E) \tag{17}$$

$$\theta_j^q = \left(\sum_{r=1}^{k} Y_{rj} \cdot u_r^q \right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \cdot v_i^q \right) \tag{18}$$

$$(j = 1, \ldots, n)$$

E は効率的なDMUの集合である。この (16)〜(18) 式を満たすウェイトの組み合わせは無数に考えられる。しかし、線形計画問題は通常の場合、これらの式を満たす多面体の端点が解として求められる。そこで、これらの式を満たす端点をすべて求めることを考える。4節で示した数値例を用いると、30個が解の候補となる。DEAでは、クロス効率値も含めて、この30個の中から解を選択していることになる。D非効率的な場合には、その中で自分にとって最も有利な解を一つ選択する。D効率的な場合には、その中で自分が効率的になる解を複数の中から選択できる。港区の場合には16個、文京区は16個、目黒区は24個である。

7. おわりに

DEAにおいて他のDMUからの評価値であるクロス効率値について考察し、それを用いた評価法を示した。

謝辞：

本研究を行うのに際し、Double Description 法のプログラム [1] を提供していただきました筑波大学の福田公明先生に感謝いたします。

8. 参考文献

[1] K.Fukuda : cdd User Manual, 1994.

[2] 枇々木：DEAにおける修正クロス効率値による評価法,「評価のOR」研究部会 (1994).

[3] 杉山, 山田：事業体間の相互評価情報を用いた調和的な効率性評価法, 94年春季・日本OR学会.

[4] 刀根： 企業体の効率的分析手法 -DEA入門- (5), オペレーションズ・リサーチ, Vol.33, No.4(1988).

[5] 山田, 松井, 杉山：DEAモデルに基づく経営効率性分析法の提案, *JORSJ*, Vol.37, No.2(1994).