1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

Semidefinite Programming と内点法

01103520　東京工業大学　小島政和　KOJIMA Masakazu

最近, 数理計画法の分野で Semidefinite Programming が注目を浴びている．特に,

(a) 線形計画問題の内点法の拡張 ([1, 4, 6, 7] 等)
(b) 組み合わせ最適化への応用 ([3, 5] 等)
(c) システムと制御への応用 ([2, 8] 等)

に関連して盛んに研究されている．$n \times n$ の実対称行列 $\boldsymbol{X}$ が正定値，半正定値であるとき，それぞれ，$\boldsymbol{X} \succ \boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{X} \succeq \boldsymbol{O}$ と記す．また，2つの $n \times n$ 行列 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$, $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]$ に対して，それらの内積を

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \mathrm{Tr}\ \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{B} = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$$

で定義する．$\boldsymbol{A}_i$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$ を $n \times n$ 対称行列とすると，標準形の Semidefinite Program とその双対問題は以下のように与えられる．

$$\left.\begin{array}{lll} (SDP-P) & \text{min.} & \boldsymbol{A}_0 \bullet \boldsymbol{X} \\ & \text{sub.to} & \boldsymbol{A}_i \bullet \boldsymbol{X} = b_i \ (i = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \ldots, m) \\ & & \boldsymbol{X} \succeq \boldsymbol{O}. \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{lll} (SDP-D) & \text{max.} & \sum b_i z_i \\ & \text{sub.to} & \sum \boldsymbol{A}_i z_i + \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}_0, \\ & & \boldsymbol{Y} \succeq \boldsymbol{O}. \end{array}\right\}$$

通常の線形計画問題とその双対問題

$$\left.\begin{array}{lll} (LP-P) & \text{min.} & \boldsymbol{a}_0 \cdot \boldsymbol{x} \\ & \text{sub.to} & \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{x} = b_i \ (i = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \ldots, m) \\ & & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{lll} (LP-D) & \text{max.} & \sum b_i z_i \\ & \text{sub.to} & \sum \boldsymbol{a}_i z_i + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}_0, \\ & & \boldsymbol{y} \geq 0. \end{array}\right\}$$

と比較すると,

LP (線形計画問題)		SDP (Semidefinite Program)
$\boldsymbol{a}_j$: n 次元ベクトル	$\Longrightarrow$	$\boldsymbol{A}_j$: $n \times n$ 対称行列
$\cdot$	$\Longrightarrow$	$\bullet$
$\geq$	$\Longrightarrow$	$\succeq$

となっていることが分る．ただし，· はベクトルの内積を表わす．

Semidefinite Program に対しては，線形計画問題に関する双対定理，相補性定理等の理論がほぼそのまま成立し，内点法が拡張されている．このチュートリアルでは以下の項目に関して簡単に解説する．

1. Semidefinite Program と内点法の歴史および現状
2. 線形計画問題と Semidefinite Program
3. Semidefinite Program の例
4. Semidefinite Program の特徴
5. Semidefinite Program に対する 主・双対内点法 [4]

References

[1] W. F. Alizadeh, J.-P. Haeberly and M. J. Overton, "Primal-dual interior-point methods for semidefinite programming," Computer Science Department, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, New York, NY, August, 1994.

[2] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory,* (SIAM, Philadelphia, 1994).

[3] M, Grötschel, Lovász and A. Schrijver, "Polynomial algorithms for perfect graphs," *Annals of Discrete Mathematics* 21 (1984) 325-356.

[4] M. Kojima, S. Shindoh and S. Hara, "Interior-point methods for the monotone linear complementarity problems in symmetric matrices," Research Reports B-282, Dept. of Information Sciences, Tokyo Institute of Technology, Oh-Okayama, Meguro, Tokyo 152, April 1994.

[5] L. Lovász and A. Schreiver, "Cones of matrices and set functions and 0-1 optimization," *SIAM J. Optimization,* 1 (1991) 166–190.

[6] Y. E. Nesterov and A. S.Nemirovskii, *Interior Point Polynomial Methods in Convex Programming: Theory and Applications* (SIAM, Philadelphia, 1993).

[7] Y. E. Nesterov and M. J. Todd, "Self-scaled cones and interior-point methods in nonlinear programming," Catholic University of Lonvain, Lonvain-la-Neuve, Belgium, 1994.

[8] L. Vandenberghe and S. Boyd, "A primal-dual potential reduction method for problems involving matrix inequalities," *Mathematical Programming, Series B* to appear.