

秘書問題の面白さ

01303783 愛知大学 玉置 光司 TAMAKI Mitsushi

1. はじめに

秘書問題(secretary problem)は、best choice problem, marriage problem, dowry problem, beauty contest problem, fiance problem と呼ばれ問題の単純さとその興味深い結果によつて多くのOR研究者に知られている。Ferguson(1989,SS)は secretary problemのプロトタイプを次のように述べている。

1. あなたは秘書を一人採用したい。
2. 応募者総数は n で既知である。
3. あなたは応募者を一人一人呼んで順に面接する。面接の順序はランダムである。
4. あなたは(もし、すべてを一同に集めて面接すれば) n 人の応募者に、好ましい順に1から n まで順位(絶対順位)をつけることができる。採否は面接直後にその人の相対順位(今まで見てきた応募者の中での順位)に基づいてきめる。
5. 一度断った人を後から採用することはない。
6. あなたはベスト(絶対順位1)を採用する確率を最大化したい。

この問題をCSP(classical secretary problem)とよぼう。よく知られているように、この問題の最適政策は最初の $r_n - 1$ 人をパスして、それ以降の最初の相対順位1の応募者(これを候補者と呼ぶ)を採用するというものである。ここで、 r_n は

$$\sum_{j=r}^n 1/j-1 > 1 \geq \sum_{j=r+1}^n 1/j-1$$

を満足する整数 r である。また、この政策の下での成功確率は

$$\phi_n = \left(\frac{r_n-1}{n}\right) \sum_{j=r_n}^n \frac{1}{j-1}$$

で与えられる。漸近的には以下ようになる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n/n = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = e^{-1} (\approx 0.368).$$

Gardner(1960)のScientific American 2月号に載ったコラムが CSP が一般に知られるきっかけになつたといわれている。これはGoogolと呼ばれる問題で次のようなものである。

(Googol) Ask someone to take as many slips of paper as he pleases, and on each slip write a different positive number. The numbers may range from small fraction of one to a number the size of a googol(1 followed by a hundred zeros) or even larger. These slips are turned face-down and shuffled over the top of a table. One at a time you turn the slips face up. The aim is to stop turning when you come to the number that you guess to be the largest of the series. You cannot go back and pick a previously turned slip. If you turn over all the slips, then of course you must pick the last one turned.

これより、Googolにおいて、カードに記入される数字を無視して相対順位だけに基づいて、最適な選択を行おうとするのがCSPであることがわかる。

学術雑誌でCSPを最初に論じたのはLindley(1961;AS)で、その後、著名な研究者による論文が続く(Dynkin(1963;SM), Chow, Moriguti, Robbins and Samuels(1964;IJM), Gilbert and Mosteller(1966;JAS))。CSPの特徴の各項目はその後多くの研究者により次のような方向に拡張、一般化された。

1. 多人数の採用。
2. 応募者総数 n が未知。
3. 面接の順序がランダムとは限らない。
4. 情報が相対順位だけの場合をNI(no information)と呼ぶ。そのほかにFI(full information), PI(partial information)がある。
FI: i 番目の応募者の能力を X_i で表す(大きいほど優秀)時、 X_1, \dots, X_n を既知の分布 F からのランダムサンプルと仮定する。面接によつて、この実現値が分かる。
PI: 分布は既知であるが、未知パラメータを含む。
5. リコールや拒否が許される。

6. 絶対順位*i*の人を採用したときの損失を*q(i)*とし、期待損失を最小化する(特に、 $q(1)=0, q(i)=1, i \geq 2$ の場合を best choice problem, $q(i)=i, i \geq 1$ の場合を rank minimization problem と呼ぶ。したがって、CSP は NI best choice problem と見ることができる)。

今日では、サーベイ論文が沢山でている(Rose(1982;AMS), Freeman(1983;ISR), Ferguson(1989;SS), Samuels(1990;HSA) and Tamaki(1994;RAMP))ので、1990年頃までの文献については、それらを参照されたい。Contemporary Mathematics 125(1992)には多くの関連論文が掲載されている。以下では、過去の重要な結果を交えながら、最近の話題の幾つかと、それに付随した open problem を紹介する。

2. FI rank minimization

秘書問題は情報構造の観点から NI と FI に分かれ、損失関数の観点から best choice, rank minimization に分かれることはすでに述べた。これらの組み合わせは4通り考えられるが、NI best choice は CSP にほかならない。NI rank minimization は Lindley(1961;AS) が最初に取り上げ、Chow et al.(1964;IJM) が解いた。彼等は最適政策の下での漸近的期待順位が

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{j}\right)^{\frac{1}{j+1}} \cong 3.8695$$

となることを導いた。FI best choice の漸近的的成功確率を求めたのは Samuels(1982;PUS)で、その値が

$$P\left[X(1-U) < c < \left(X + \frac{Y}{U}\right)(1-UV)\right] = e^{-c} + (e^c - c - 1) \int_1^{\infty} x^{-1} e^{-cx} dx \cong 0.580164$$

となることを示した(ここで、 X, Y, U, V はそれぞれ独立な確率変数で、 X, Y がパラメータ 1 の指数分布に、 U, V が $U(0, 1)$ に従う)。FI rank minimization に挑戦したのが Bruss and Ferguson(1993;JAP)である。最初の k -個の観測値 $x_1, \dots, x_k (x_1 < \dots < x_k$ の順に並べる) をパスして、以降最適に振る舞う時の期待順位を $V_k(x_1, \dots, x_k)$ とすると、最適方程式は次のようになる。

$$V_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1}) = \sum_{j=0}^{k-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \min\{j+1+(n-k)x, V_k(x_1, \dots, x_j, x, x_{j+1}, \dots, x_{k-1})\} dx$$

ただし、 $x_0=0, x_k=1; V_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) = n - (x_1 + \dots + x_{n-1})$ で求める期待順位は $V_0(\phi)$ 。これを直接解くのは困難なので、彼等は memoryless rule $\mathbf{p}=(p_1, \dots, p_n)$ (stopping time N が、 $N = \min\{k; X_k \leq p_k\}$ であらわされるルール)の下で、順位 $R(\mathbf{p})$ の期待値が

$$E[R(\mathbf{p})] = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\prod_{i=1}^{k-1} q_i \right) \left[(n-k)p_k^2 + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{((p_k - p_j)^+)^2}{q_j} \right]$$

で計算されることを示し(ここで $q_i = 1 - p_i$)、この問題と Moser problem の類似性から $p_k = 2/(n-k+2), 1 \leq k \leq n$ の場合に注目し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} E[R(\mathbf{p})] = 7/3$ を導いた。彼等は、真値を 1.908 と 2.3266 の間に予想している。Assaf and Samuel-Cahn(1991)も同じ問題を考え、memoryless rule $p_k = c/(n-k+c)$ の範囲では、 $c=1.9469$ の時に期待順位が最小となり、その値が 2.3318 となることを示した。現状はここまでで、FI rank minimization は依然、未解決である。

3. Secretary problem as a game of Googol

既に述べたように、Googol は当初 CSP として定式化されたが、これをそのまま勝ち負けを競うゲームとして定式化しようとすると、次の2つの問題が浮上する。以下では、“わたし”は、数字を書く(数字の生成ルールを決める)人、“あなた”は最大数を当てる(停止ルールを決める)人とする。

- (1) あなたは、あなたの停止ルールを(相対順位だけでなく)数字そのものに依存させることにより、成功確率を ϕ_n より大きくすることができるか?
- (2) あなたは、わたしの生成ルールを知った時、成功確率を ϕ_n より大きくすることができるか?

Ferguson(1989;SS)は、この問題に対して次の意味で“No”と答えている。わたしが n 個の数字 Z_1, \dots, Z_n を、次のルール

$$Z_1, \dots, Z_n, \text{ given } \theta \sim \text{i.i.d. } U(0, \theta), \text{ where } \theta \sim P_a(\alpha(\epsilon), 1)$$

に従って生成する時、任意の $\epsilon > 0$ に対して、あなたの成功確率は $\phi_n + \epsilon$ 以下におさえられる。ここで、 $P_a(\alpha, m)$ は

パラメータ (α, m) のバレット分布を表わし、その密度関数は $\alpha m^\alpha / \theta^{\alpha+1}$, $\theta > m$ で与えられる。 $\alpha(\varepsilon)$ は ε に依存して選ばれる0に十分近い数。Samuels(1989;SS)は、成功確率が ε -optimalでなく、ちょうど ϕ_n となるような exchangeable r.v.'sの生成ルールが存在するかどうかを調べ、もし存在すれば、その生成ルールを求める問題を Ferguson's secretary problemと呼んだ。Samuels(1989;SS)は $n=2$ の場合、生成ルールが存在しないことを示した。Silverman and Nadas(1992;CM)は $n=3$ の場合、これが存在することを示し、Gnedin(1994;AP)は $n \geq 3$ に対して存在することを示した。生成ルールは次のようになる(ただし、 ε は十分小さい正数)。

$$Z_1, \dots, Z_n, \text{ given } \theta \sim \text{i.i.d. } U(0, \theta), \quad \text{where } \theta \sim \frac{\varepsilon(n-\varepsilon)}{2n\theta^{1-\varepsilon}} I_{\{0 < \theta \leq 1\}} + \frac{\varepsilon(n+\varepsilon)}{2n\theta^{1+\varepsilon}} I_{\{\theta > 1\}}$$

Samuels(1994;NIC)はbest choiceに限定しないで、一般の損失関数の場合を考察したが $n=3$ の時でさえ、完全には解明されていない。

4. Optimal stopping game

Optimal stopping game は情報の観点(NI or FI, each or common), 利得の観点 (zero sum or non-zero sum)、さらには優先権の有無等によつて区別され、モデルが多岐にわたっている。Sakaguchi(1994;NIC)のレビューから代表的なモデル(2人ゲーム)を2つ紹介する。両モデルとも、各プレーヤーの目的は相手よりも大きな値を得る確率の最大化。

(1) Enns and Ferenstein(1985;JOR)(zero sum / common / priority)

2人のプレーヤー A, B は共通の i.i.d. sequence $\{X_i, 1 \leq i \leq n\}$ を観測する。 $X_i \sim U(0, 1)$ で A に優先権がある。A が X_i をパスした時、B に選択権が回る。両者ともパスした時は X_{i+1} を観測する。一方が選択すれば他方の1人ゲームとなる。 $P_n(x)$ を A の手番で $X_1=x$ を観測しているとき、以後、両者が最適にふるまう場合の A の勝つ確率とすると、最適方程式は

$$P_n(x) = \max \left[x^{n-1}, \min \left\{ 1 - x^{n-1}, \int_0^1 P_{n-1}(y) dy \right\} \right]$$

となる。ただし、 $n=2, 3, \dots$; $P_1(x) \equiv 1$ 。A が勝つ確率の漸近値は $1 - u^* = 0.6724$ 。 $-u \log u = \log 2 - u$ の根が u^* 。

(2) Mazalov(to appear)(zero sum / each / non-priority)

A, B は各々独立に i.i.d. sequence $\{X_i, 1 \leq i \leq n\}$, $\{Y_i, 1 \leq i \leq n\}$ を観測する。 $X_i, Y_i \sim U(0, 1)$ 。A, B は対称であるから、A について述べると、彼の戦略は decreasing sequence $1 > z_1 > \dots > z_n = 0$ を決めることである。これは $X_i \geq z_i$ となる最初の i でストップすることを意味する。最適な $\{z_i, 1 \leq i \leq n-1\}$ は次の連立方程式の根として与えられる。

$$\sum_{j=1}^i z_1 \dots z_{j-1} (1 - z_j)^2 + \left[\sum_{j=i+1}^n z_1 \dots z_{j-1} \right] (1 - 2z_i + z_{i+1}^2) = 0, \quad 1 \leq i \leq n-1$$

Sakaguchi(1994;NIC) は今後解かれるべき問題として Mazalov の NI ヴァージョンを上げている。

5. Multiple choice secretary problem

様々な NI multiple choice secretary problem が考えられてきた。例えば、 m 回選択が許され、その中に best k すべてが含まれる場合を成功とみなすモデル、あるいは best k のどの要素が含まれるかによって効用が異なるモデル等が考えられてきたが、これらの最適政策は一般に複雑である。Preater(1993;ORL, 1994;MOR)の研究は、効用関数 $\psi(\cdot)$ の自然な仮定の下で、最適政策の共通の構造を探ろうとするものである。時刻 r までに選んだ応募者の集合を R (選ばれた者の、その時点での相対順位の集合) とし、以後最適に振る舞う場合の期待効用を $V_r(R)$ とすると、これは次の関係を満足する。

$$V_{r-1}(R) = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r \max \{ V_r(R^*j \cup \{j\}), V_r(R^*j) \}$$

ただし、 $R^*j = \{i: i \in R, i < j\} \cup \{i+1: i \in R, i \geq j\}$ で求める値は $V_0(\phi)$ 。これより時刻 r では

$$V_r(R^*j \cup \{j\}) \geq V_r(R^*j), \tag{1}$$

が成立する場合、相対順位 j の者を採用することになる。Preater(1994;MOR)は与えられた R と j に対して、あ

る整数 $r^*(R, j)$ が存在して、 $r \geq r^*(R, j)$ に対して関係式(1)が成立する性質をtime-isotoneと呼んだ。彼は効用関数 $\psi(A)$ (A は選ばれた者の絶対順位の集合)がregularの時、最適政策はtime-isotoneになると予想している。 $\psi(A)$ がregularとは集合メンバーの一部をベターな者に変更したり、あるいは新しいメンバーを付け加えたりすることによって、効用が減少しないという性質である。

6. Secretary problem with rank-dependent rejection probability

応募者が申し出を断る可能性を考慮したモデルを最初に考察したのはSmith(1975;JAP)である。Smithは、応募者は順位に無関係に確率 q で申し出を断ると仮定した(確率 $1-q$ で受け入れる)。best choice の時、最適政策は threshold type となる。すなわち、最初的一定数をパスして、それ以降の候補者に採用(受け入れられるまで)申し出るという形になる。Tamaki and Ohno(1994;NIC) は、これを順位に依存する拒否確率を持つ場合に拡張した。 q_i を絶対順位 i の応募者が申し出を断る確率とし、 $p_i=1-q_i$ とする。プロセスの状態を $(r; i_1, \dots, i_k)$ で記述する。これは、最初の r 人の中の k 人に採用を申し出て断られた状態を表している。ただし、 $i_1 < \dots < i_k$ は、この k 人の(r 人の中での)相対順位を小さい順に並べたものである。 $(r; \phi)$ は、まだ申し出をしていない状態を表す。状態 $(r; i_1, \dots, i_k)$ からの変換された最適値関数を $V_r(i_1, \dots, i_k)$ で表す(同様に $V_r(\phi)$ を定義する)。これは次式を満足する。

$$\begin{aligned} V_{r-1}(i_1, \dots, i_k) &= \frac{1}{r} \max \{ p_1 \left(\frac{r}{n} \right) b_{r-1}(i_1, \dots, i_k) + V_r(1, i_1+1, \dots, i_k+1), V_r(i_1+1, \dots, i_k+1) \} \\ &\quad + \left(\frac{i_1-1}{r} \right) V_r(i_1+1, \dots, i_k+1) \\ &\quad + \sum_{t=2}^k \left(\frac{i_t-i_{t-1}}{r} \right) V_r(i_1, \dots, i_{t-1}, i_t+1, \dots, i_k+1) \\ &\quad + \left(\frac{r-i_k}{r} \right) V_r(i_1, \dots, i_k) \end{aligned}$$

$$V_{r-1}(\phi) = \frac{1}{r} \max \{ p_1 \left(\frac{r}{n} \right) + V_r(1), V_r(\phi) \} + \left(\frac{r-1}{r} \right) V_r(\phi)$$

with $V_n(i_1, \dots, i_k) \equiv 0$ and $V_n(\phi) = 0$ 。成功確率は $V_0(\phi)$ 。また、 $b_r(i_1, \dots, i_k)$ は次の再帰関係式を満たす。

$$\begin{aligned} b_{r-1}(i_1, i_2, \dots, i_k) &= \left(\frac{i_1}{r} \right) b_r(i_1+1, i_2+1, \dots, i_k+1) \\ &\quad + \sum_{s=2}^k \left(\frac{i_s-i_{s-1}}{r} \right) b_r(i_1, \dots, i_{s-1}, i_s+1, \dots, i_k+1) \\ &\quad + \left(\frac{r-i_k}{r} \right) b_r(i_1, i_2, \dots, i_k) \end{aligned}$$

$$\text{with } b_{n-1}(i_1, i_2, \dots, i_k) = \prod_{t=1}^k q_{i_t+1}.$$

たとえば、 $q_i = q, 3 \leq i \leq n$ の場合、最適政策は以下のようになる (q_1 の値は最適政策に影響を与えない)。

Case 1 ($q_2 \geq q$): 最適政策はthreshold type。

Case 2 ($q_2 < q$): 2数 $r_n^1, r_n^2 (r_n^1 \leq r_n^2)$ が存在して、最適政策は最初の r_n^1-1 をパスして、それ以降、最初の候補者に採用を申し出る。この者が時刻 r に出現し、申し出を断った場合、以後の政策は次のようになる。

[$r \geq r_n^2-1$ の場合] 以降、最初の候補者に採用を申し出る。

[$r < r_n^2-1$ の場合] 以後の候補者の出現時刻が r_n^2-1 以前の場合は候補者への申し出を1回づつ見送る。すなわち、時刻 r 以降の最初の候補者は見送り、次の候補者には申し出を行ない、その次の候補者は見送り。。。ということになる。ただし、時刻 r_n^2-1 までに採用が決まらない場合、それ以降の候補者には引き続いて採用を申し出る。

Tamaki and Ohno は $q_2 \geq q_3 \geq \dots \geq q_n$ の場合、最適政策はthreshold type になると予想している。

Abbreviations.

AMS: Advances in Management Studies, AP: Annals of Probability, AS: Applied Statistics, CM: Contemporary Mathematics, HAS: Handbook of Sequential Analysis, edited by Ghosh & Sen, Marcel Dekker, IJM: Israel J. Mathematics, ISR: International Statistical review, JAP: J. Applied Probability, JAS: J. American Statistical Association, JOR: J. Operations Research Society of Japan, MOR: Mathematics of Operations Research, NIC: Nanzan International Conference abstract, ORL: Operations Research Letter, PUS: Purdue University Statistics Department Mimeo Series, RAMP: RAMP Symposium abstract, SM: Soviet Mathematics