1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

リスク混合型資本市場における均衡

東京工業大学　今野 浩　Hiroshi KONNO
01206490　東京工業大学　鈴木 賢一*　Kenichi SUZUKI

1.　はじめに

今野-白川は、2パラメータ・アプローチの枠組を用いた [3][2] の一連の研究において、単一のリスク指標のみが存在する市場において、均衡が存在する（＝非負の価格ベクトルpが存在する）ための必要十分条件を見い出した。一方、現実の経済においては、各投資家ごとにリスク指標が異なっていることが指摘できる。しかし、適当なリスク指標のクラスを考えることによって、複数のリスク指標が混合して存在している市場においても均衡の存在する条件を考察することが可能である。

2.　市場に関する仮定

以下の仮定をおく。

仮定 1 市場には、m 人の投資家がおり、n この危険資産と一つの無危険資産が取り引きされている

仮定 2 ρ、$sigma$ をそれぞれ、ポートフォリオの（一期あたりの）期待値およびリスク（後述）とする。各投資家は、ρとσ のみによりポートフォリオを選択する。投資家 i の効用を $U_i(\rho,\sigma)$ とすると

$$\frac{\partial U_i}{\partial \rho} > 0,\quad \frac{\partial U_i}{\partial \sigma} < 0,\quad i = 1,\ldots,m \tag{2.1}$$

であるとする。

仮定 3 すべての投資家は、各証券の $(S_1,\ldots,S_n)$ の収益率 $(R_1,\cdots,R_n)$ の同時分布に関して共通の知識を持っている。

仮定 4 市場には、取り引きコストおよび税金は存在しない。すべての資産は無限に分割可能である。無危険資産は、利率 r_0で無限に貸し借り可能であるが、危険資産については、空売りはできない。

仮定 5 取り引きの前後で資金の流出・流入はない。

以　下　の　記　法　を　用　い　る　。

- x_{ij}^0　投資家 I_iの証券 jの取り引き前の保有枚数
- x_{ij}　投資家 I_iの証券 jの取り引き後の保有枚数
- p_j　証券 jの価格
- w_i^0　投資家 I_iの初期総資産額（$= x_{i0} + \sum_{j=1}^n p_j x_{ij}^0$）
- x_j^0　証券 jの総枚数（$= \sum_{j=1}^n x_{ij}^0$）

仮定 5 より、

$$x_{i0} + \sum_{j=1}^n p_j x_{ij} = w_i^0,\quad x_{ij} \geq (02.2)$$

$$x_j^0 = \sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{i=1}^m x_{ij}^0 \tag{2.3}$$

ポートフォリオ$x_i = (x_{i0}, x_{i1}, \ldots, x_{in})$の収益率（確率変数）は

$$R(x_i) = \sum_{j=0}^n p_j R_j x_{ij} / w_i^0 \tag{2.4}$$

で与えられ、$\mu = \sum_{j=1}^n p_j r_j x_{ij} / w_i^0$である（ただし、$r_j \equiv \mathrm{E}[R_j]$）。
次に、リスク指標を関数形で与える。木島-大西は、[1] においてリスクを公理的に定義し、一つの例として、

$$\sigma(X : \tilde{f}, k) = \{\mathrm{E}[\tilde{f}(X - \mathrm{E}[X])^k]\}^{1/k},\quad k \geq 1 \tag{2.5}$$

（ただし、$\tilde{f}_i(\xi) = \alpha_1\xi, (0, \alpha_2\xi), \mathrm{when}\,\xi < 0, (0, > 0)$）を提案している。本研究では、リスク指標として (??) を用いることとする。

3.　個人の最適化

投資家が要求する収益率の期待値をρとすると、仮定2より、最適なポートフォリオは与えられた収益率のもとでの最小のリスクを持つものである。したがって、ρ所与のもとで投資家は、以下の問題を解く。

$$\left|\begin{array}{ll} \text{minimize} & \sigma_i(R(x_i); \tilde{f}_i, k_i) \\ \text{subject to} & x_{i0} + \sum_{j=1}^{n} p_j x_{ij} = w_i^0 \\ & r_0 x_{i0} + \sum_{j=1}^{n} r_j p_j x_{ij} = \rho w_i^0 \\ & x_{ij} \geq 0,\quad j = 1,\ldots,n \end{array}\right. \tag{3.1}$$

問題(3.1)に対して、以下の一般化問題を考えることができる。

$$\left|\begin{array}{ll} \text{minimize} & \mathrm{E}[\tilde{f}_i(\sum_{j=1}^{n}(R_j - r_j)z_{ij})^{k_i}] \\ \text{subject to} & \sum_{j=1}^{n}(r_j - r_0)z_{ij} = 1 \\ & z_{ij} \geq 0,\quad j = 1,\ldots,n \end{array}\right. \tag{3.2}$$

Lemma 1 問題*(3.2)*は、最適解z_j^*を持つ。

Lemma 2 問題*(3.1)*の最適解を$\bar{x}_{ij}$とすると

$$\bar{x}_{ij}(\rho) = (\rho - r_0) z_j^* w_i^0 / p_j \tag{3.3}$$

以上より、各ρにより、最適なポートフォリオの期待値とリスクが求められる。したがって、U_iは、ρの関数となり、投資家は、自らの効用を最大化するρ_iを決めることができる。

仮定 6 ρ_iは、有限で、すべての投資家について唯一に求まる。

4.　均衡

(2.3)と(3.3)から、

$$p_j x_j^0 = \textstyle\sum_{i=1}^{m}(\rho_i - r_0) w_i^0 z_{ij}^*,\quad j = 1,\ldots,n \tag{4.1}$$

なる関係を得る。一方、w_i^0の定義より

$$p_j x_j^0 = \sum_{i=1}^{m}(\rho_i - r_0)\left\{x_{i0}^0 + \sum_{l=1}^{n} p_l x_{il}^0\right\} z_{ij}^*,\quad j = 1,\ldots,n \tag{4.2}$$

となる。これは、p_j, $j = 1,\ldots,n$に関する連立方程式となっている。

$$\begin{array}{ll} a_i & = ((\rho - r_0)x_{i1}^0, \ldots, (\rho - r_0)x_{in}^0) \\ b_i & = (z_{i1}^*/x_1^0, \ldots, z_{in}^*/x_n^0) \\ c & = \sum_{i=1}^{m}(\rho_i - r_0)x_{i0}^0 b_i \end{array} \tag{4.3}$$

と置く。

Theorem 1 非負の価格ベクトル$\boldsymbol{p}$が存在するための必要十分条件は、$\boldsymbol{A} \equiv \sum_{i=1}^{m} b_i a_i^T$の最大固有値$\lambda(\boldsymbol{A})$が1より小さいことである。

Theorem 2 もし、

$$\textstyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\rho_i - r_0)\frac{x_{ij}^0}{x_j^0} z_{ij}^* < 1 \tag{4.4}$$

であらば、均衡が成立する。

References

[1] M. Kijima and M. Ohnishi, "Risk Aversion and Wealth Effects on Optimal Portfolios with Many investment Opportunities", Technical Report No.92-02, Graduated School of System Management, University of Tsukuba

[2] H. Konno and H. Shirakawa, "Equilibrium Relationos in a Capital Asset Market: A Mean Absolute Deviation Approach", Financial Engineering and the Japanese Markets, 1:21–35,1994

[3] H. Konno and H. Shirakawa, " Existence of a Nonnegative Equilibrium Price Vector in the Mean Variance Capital Market"