

## 金利期間構造の平滑化の比較

岡山 正之

法政大学大学院

浦谷 規

法政大学工学部

## 1 はじめに

金利の期間構造を長期利付国債からの推定は、ファイナンスにおいて重要である。利付国債価格は、キャッシュフロー受取までの期間に対応する割引関数の線形関数である。ただし、その係数はキャッシュフローである。従って、割引関数は回帰によって求められる。ところが、キャッシュフロー行列の階数は、求める割引関数の次元より小さい。そこで、残差 2 乗誤差最小となる割引関数は一般逆行列等の方法によって求められる。しかし、この割引関数は残存期間に対して単調減少関数にならない。非減少の時点では、先渡し金利が負になり裁定取引が存在する。そこで、割引関数減少性を制約とする制約付残差 2 乗誤差最小を求めた。しかしながら、減少割引関数制約は線形であるために、この解から求められる先渡し金利は滑らかにはならない。先渡し契約によって、ある時点では無利子で借り入れ可能となる。

本研究では、割引関数の単調減少性及び滑らかさを満足する平滑化方法を、残差 2 乗誤差の基準で比較した。平滑化の方法は、(1) 散布図平滑化手法である局所重み付回帰 (loess) (2) 核型推定量を用いた平滑化 (ksmooth) (3) Smooth Spline (4) Super Smoother を用いた。

## 2 線形回帰による割引債価格の推定

利付き国債は割引債のポートフォリオであるから、銘柄  $i$  の価格はクーポン  $c_i$  と割引債価格  $d(\tau)$  で理論的には次の通りにかかる。

$$p_i(t) = \frac{c_i}{2} \frac{k_1 - t}{180} d(k_1 - t) + \frac{c_i}{2} \sum_{k \in T_i} d(k - t) + (1 + \frac{c_i}{2}) d(\max(k) - t)$$

ただし、 $t$  は現在の時刻、 $T_i$  は銘柄  $i$  のクーポン受取日の集合である。これらすべての銘柄について誤差ベクトルを  $e(t)$  として、表すと、

$$p(t) = C(t)d(t) + e(t) \quad (1)$$

ただし、 $C(t)$  はキャッシュフロー行列である。この行列の次元は (銘柄数)  $\times$  ( $\{T_i\}$  の要素数) である。式 (1) から線形回帰により割引債価格  $d$  を求めたいが、 $C(t)$  は最大階級行列ではない。この問題を解決するため次の 3 つの方法を考えた。

## 一般逆行列法

特異値分解  $C = Q_1 \Sigma Q_2^T$  を考えるとき、 $C$  の一般逆行列は

$$C^+ = Q_2 \Sigma^+ Q_1^T$$

で、 $\Sigma^+$  ( $n \times m$ ) の対角要素は特異値の逆数  $1/\sigma_1, \dots, 1/\sigma_r$  である。

$$Cd = p$$

の回帰モデルを解くには、 $C^T Cd = C^T p$  から、 $C^T C$  の逆行列を求めればよかったが、 $C$  に線形従属な列ベクトルが含まれる場合は、 $C^T C$  の逆行列は存在しないので、一般逆行列  $C^+$  を用いて、

$$d = C^+ p$$

で誤差 2 乗最小の解を得る。

## 部分回帰法

式 (1) を部分的に線形回帰モデルをあてはめることにより割引債価格  $d$  を求めるのが部分回帰法である。

キャッシュフロー行列のランクはベクトル  $d$  の次元より小さいので、最大階数と方程式数が等しくなるように  $C$  と  $p$  を分割する。

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ C_2 & C_3 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

分割した部分回帰問題の 1 つは、

$$p_1 = C_1 d_1 + e_1$$

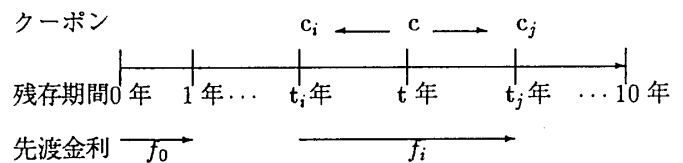
このときのクーポン受取日ベクトルを  $T_1$  とする。クーポン受取日ベクトル  $T_1$  に属さないが  $C_2$  に含まれるクーポン受取日の割引債価格は、 $d_1$  の残存期間に対する回帰で推定する。残りの回帰問題は、

$$p_2 - C_2 \hat{d}_1 = C_3 d_2 + e_2$$

であり、これにより  $\hat{d}$  を求める。

## aggregation 法

行列  $C$  の列ベクトルを集約し、1 年から 10 年の残存期間に対する割引債価格  $d = (d_1, d_2, \dots, d_{10})^T$  を求める方法である。



受取  $c$  は整数時刻  $t_i, t_j$  にそれぞれ、 $c_i, c_j$  に分配される。

$$c = c_i \exp(f_i(t - t_i)) + c_j \exp(f_i(t_j - t)) \quad (2)$$

時刻  $t_i$  におけるクーポン  $c$  のデュレーションと、時刻  $t_j$  における受取を  $c_i$  と  $c_j$  に分配した時のデュレーションとが等しいとすると、(2) 式より、 $c_i, c_j$  が求まる。

$$c_i = \frac{t_j - t}{t_j - t_i} \exp(-f_i(t - t_i)) c, \quad c_j = \frac{t - t_j}{t_j - t_i} \exp(-f_i(t - t_j)) c$$

クーポンの分配は、既知の  $f$  を用いて、キャッシュフロー行列  $C$  からアグリゲート行列  $A$  を作ることであり、 $A$  は最大階級行列であるので、

$$p = Ad + e \quad (3)$$

から、割引債価格  $d = (d_1, d_2, \dots, d_{10})^T$  を推定する。

## 3 割引関数の単調減少化

割引関数の単調減少性を満足するために次の 2 方法を考えた。

## 制約付最小 2 乗法

$$\min_d \| p(t) - C(t)d(t) \|^2$$

$$s.t. \quad 1 \geq d_1 \geq \dots \geq d_m \geq 0$$

なる割引債価格  $d$  を制約付最小 2 乗法により求めた。

#### 前進後退法

前進法では、残存期間 0 年の点を基準に残存期間の小さい割引債価格を順に比較して行き、前時点より増加した点を非減少関数の原因である点と考えることにする。後退法は残存期間が 10 年の点を基準に単調減少化していく。前進法の単調減少化を以下に示す。

各時点において存在する銘柄数を  $n$ 、残存期間を  $T_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )、そのときの割引債価格を  $d(T_i)$  とすると、

$$d(T_{i-1}) < d(T_i) \quad (4)$$

となったとき、 $d(T_i)$  を非減少関数の原因であると考えた。今回推定を試みた 17 時点の部分回帰法による割引債価格では、このような点は単独で存在するか、2 点連続して存在するかのどちらかであった。すなわち (4) 式の  $d(T_i)$  あるいは、

$$d(T_{i-1}) < d(T_i) < d(T_{i+1}) \quad (5)$$

となったときの  $d(T_i)$ 、 $d(T_{i+1})$  である。

式 (4) の場合  $d(T_{i-1})$ 、 $d(T_i)$  の推定値を

$$m_1 \equiv \text{mean}(d(T_{i-1}), d(T_i))$$

とする。ただし、 $d(T_{i-2}) < m_1$  の場合は  $d(T_{i-1})$ 、 $d(T_i)$  の推定値を  $d(T_{i-2})$  とする。

式 (5) の場合  $d(T_{i-1})$ 、 $d(T_i)$ 、 $d(T_{i+1})$  の推定値を

$$m_2 \equiv \text{mean}(d(T_{i-1}), d(T_i), d(T_{i+1}))$$

とする。ただし、 $d(T_{i-2}) < m_2$  の場合は  $d(T_{i-1})$ 、 $d(T_i)$ 、 $d(T_{i+1})$  の推定値を  $d(T_{i-2})$  とする。

#### 4 平滑化による最終利回り曲線の推定

減少性を制約とする割引関数は滑らかでないので線形回帰の解から求められる最終利回り曲線 (YTM) を平滑化し、割引関数の単調性と滑らかさを満足する推定を考えた。

#### 局所重み付回帰 loess による推定

散布図  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  の方法として、モデル

$$y_i = g(x_i) + \epsilon_i$$

のあてはめを考える。ここで  $g$  は滑らかな関数で、 $\epsilon_i$  は平均 0 等分散の確率変数である。滑らかさの仮定から  $y_i$  を計算する際に  $(x_i, y_i)$  の近隣を用いる。近隣数はパラメータ span で定め、データ数に対する割合で指定する。遠い近隣ほど小さい重みを付け、(0,1,2) 次多項式回帰を用いる。頑健推定の場合は残差に対する重みも付ける。

loess は、誤差の分布として正規分布を仮定した loess gaussian と、対称分布を仮定した頑健的な loess symmetric に分けられる。

最適なスパンの選択は用いるデータの特性に依存し、事前に知ることはできないが、スパンを大きく設定することは平滑化の滑らかさを増加させ、小さく設定するとあてはめの残差が減少する傾向にある。

局所重み付回帰は多次元散布図平滑化手法であるので、YTM を平滑化する場合、

(1) YTM の残存期間に対する 2 次元平滑化

(2) YTM の時点と残存期間に対する 3 次元平滑化

の 2 通りの平滑化が考えられる。(1)、(2) においてそれぞれ、誤差分布の仮定 (正規分布、対称分布)、局所的な多項式回帰の次数 (0,1,2) の全ての組合せを試みた。誤差に対称分布を仮定した場合は頑健的な推定を行なう。

#### 核型推定量を用いた平滑化 ksmooth による推定

確率密度関数の条件を満足する核関数  $K()$  を用いて

$$\hat{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^n K\left(\frac{x_i - x_j}{b}\right) y_j}{\sum_{j=1}^n K\left(\frac{x_i - x_j}{b}\right)}$$

により平滑化する方法である。ここで  $b$  はバンド幅パラメータである。核関数には Box、Triangle、Parzen、Normal を用いた。Normal は正規分布、Box は  $(-0.5, 0.5)$  の一様分布の密度関数で、Triangle は Box と Box、Parzen は Box と Triangle の畳み込みである。ksmooth については、YTM の残存期間に対する 2 次元平滑化による推定のみを試みた。

この他、suprer smooter、smoothing spline を用いた推定も試みた。

#### スパン、バンドの選択

loess、ksmooth は共に、推定に用いるデータの各々に重み関数に基づく重みを付け、回帰 (平均) を行なう。この重み関数の影響を及ぼす範囲を定めるパラメータが loess ではスパンであり、ksmooth ではバンドである。これらのパラメータが変化すれば、平滑結果も変化する。そこで、スパンとバンドの選択基準を次のように定めた。

- 平滑値から計算される利付債価格の一銘柄あたりの誤差を最小にし、
- 推定される割引債価格が減少関数になること。

この基準によりスパン、バンドを次の通りに選択した。

- (1) スパン (バンド) の初期値  $f = f_0$  と最終値  $f_e$  を設定
  - (2) スパン (バンド)  $f$  で YTM を平滑化
  - (3) 割引債価格 ( $d$ ) を求める
  - (4)  $d$  が減少関数かどうか調べる
  - (5) 利付債価格推定値と誤差を求める
  - (6)  $f$  を  $f - \Delta$  で置き換える
  - (7)  $f$  が  $f_e$  になるまで (2) 以降を繰り返す
  - (8)  $d$  が減少関数で誤差が最小のスパン (バンド) を選択
- loess の場合  $f_0 = 2$ ,  $f_e = 0.18$ ,  $\Delta = 0.01$  とし、ksmooth の場合は  $f_0 = 3$ ,  $f_e = 0$ ,  $\Delta = 0.01$  とした。

#### 5 おわりに

先渡し金利が滑らかで正の制約下での 2 乗誤差最小の割引関数は、滑らかさの理論的制約式が明らかでないので、制約なしの推定値の平滑化がデータの特性をより明らかにする割引関数推定方法である。

#### 参考文献

- [1] Cleveland, W.S., 1979, Robust locally weighted regression and smoothing scatterplots, *Journal of the American Statistical Association* 74, 829-836.
- [2] Cleveland, W.S., 1988, Locally weighted regression: an approach to regression analysis by local fitting, *Journal of the American Statistical Association* 83, 596-610.
- [3] 浦谷 規, 岡山 正之, "10 年国債のデータ解析と金利の期間構造", OR 研究会, ファイナンスの OR (1994 年 9 月)
- [4] 浦谷 規, 岡山 正之, "10 年国債と金利の期間構造", 日本金融証券計量工学学会 冬期大会 (1994 年 12 月)
- [5] 岡山 正之, 浦谷 規, "10 年国債の YTM の平滑化", 日本金融証券計量工学学会 冬期大会 (1994 年 12 月)