

分散最小化資源配分の計算結果

01007584 大阪工業大学 一森哲男 ICHIMORI Tetsuo

1 記号と定義

- 1 $w_i (1 \leq i \leq n)$ は正の定数 (重み)
- 2 $q(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{w_i}\right)^2$ 2乗平均
- 3 $m(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{w_i}$ 平均
- 4 $w(\mathbf{x}, \lambda) = q(\mathbf{x}) - 2\lambda m(\mathbf{x})$
- 5 $v(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}) - m^2(\mathbf{x})$ 分散
- 6 $w_{\max} = \max\{w_1, \dots, w_n\}$
- 7 $w_{\min} = \min\{w_1, \dots, w_n\}$
以下, $w_{\max} \neq w_{\min}$ と仮定する.
- 8 分散最小化問題 (P)

$$\min v(\mathbf{x}) \quad s.t.$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = N$$

$$x_i \geq 0 \quad (1 \leq i \leq n) \quad \text{integer}$$

- 9 $\lambda_A = \frac{N}{n} \frac{1}{w_{\max}}$
- 10 $\lambda_B = \frac{N}{n} \frac{1}{w_{\min}}$
- 11 平面 $m - q$ を考える. ある実行可能解 \mathbf{x} に対して, 点 $X = X(m_X, q_X)$ を定める.

$$m_X = m(\mathbf{x}), \quad q_X = q(\mathbf{x})$$

- 12 平面 $m - q$ 上の任意の点 Y に対して

$$L(Y) = q_Y - m_Y^2$$

を定める.

2 アルゴリズム

- 1 点 A と B を定める
- 2 $l(A)$ と $l(B)$ の交点 H を求める
- 3 $D = \{\Delta AHB\}$ と置く
- 4 $U = \min\{v(\mathbf{x}_A), v(\mathbf{x}_B)\}$
- 5 $T = (U \text{ を与える点})$
- 6 $D = D - \{\Delta AHB\}$
- 7 if $U > L(H)$ then
- 8 $\lambda_C = \frac{1}{2}(AB \text{ の傾き})$ とおき $w(\mathbf{x}, \lambda_C)$ を最小にする点 C を求める

```

9       $U = \min\{U, v(x_C)\}$ 
1 0     $T = (U \text{を与える点})$ 
1 1     $l(A)$  と  $l(C)$ ,  $l(B)$  と  $l(C)$  の交点  $I, J$  をそれぞれ求める
1 2    if  $U > L(I)$  then  $D = D \cup \{\Delta AIC\}$ 
        if  $U > L(J)$  then  $D = D \cup \{\Delta CJB\}$ 
        endif
1 3    if  $D = \phi$  then
         $T$  を出力
    else
         $D$  の中の一要素を選びそれを  $\Delta AHB$  としてステップ6へもどる
    endif

```

3 計算結果

様々な変数の数 n および資源の総数 N に対して計算を試みた。各 $n - N$ に対する数値はランダムに作成された 1000 題の平均値で何回 $w(x, \lambda)$ の最小化を試みたかを示している。

| $n-N$ | $N=200$ | $N=300$ | $N=400$ | $N=500$ |
|--------|---------|---------|---------|---------|
| $n=5$ | 10.46 | 11.01 | 11.53 | 11.90 |
| $n=10$ | 11.62 | 12.13 | 12.59 | 12.98 |
| $n=15$ | 11.94 | 12.87 | 13.02 | 13.47 |
| $n=20$ | 11.97 | 12.96 | 13.02 | 13.55 |
| $n=25$ | 12.12 | 13.33 | 13.40 | 14.06 |
| $n=30$ | 12.46 | 13.29 | 13.49 | 13.96 |
| $n=35$ | 12.54 | 13.37 | 13.69 | 14.24 |
| $n=40$ | 12.54 | 13.44 | 13.74 | 14.10 |
| $n=45$ | 12.54 | 13.43 | 13.85 | 14.25 |
| $n=50$ | 12.90 | 12.97 | 13.73 | 14.27 |