1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

# グラフ上の探索問題と費用負担：リニアグラフの場合

01105053　富山大学経済学部　菊田健作　KIKUTA Kensaku

$G=(V,E)$を（無向）グラフとする．ここに$V=\{0,1,\ldots,n\}$は点集合、Eは$\{(i,j): i,j \in V\}$の部分集合でありEを辺集合という．点$i_0$と$i_s$とを結ぶ道とは，順序のついた$(s+1)$個のVの点の組$\pi=(i_0,i_1,\ldots,i_s)$であって，$(i_{r-1},i_r) \in E$がすべての$r=1,\ldots,s$について成り立つものである．道$\pi$は点$i_0$と$i_s$を結ぶという．$i_0$を$\pi$の始点，$i_s$を終点という。特に，$V=\{i_0, i_1, \ldots, i_{s+1}\}, E=\{(i_r,i_{r+1}): i_r \neq i_{r+1}, r=0,\ldots,n-1\}$が成立するとき，Gをリニアグラフという．すべての点が異なる道を初等的な道という．

グラフ$G=(V,E)$上の探索問題について述べる．点$1,\ldots,n$のどれか一つに静止目標物がある．探索者は点0から出発して，辺上を移動しつつ，点を一つずつ調べていく．見逃し確率はどの点についても0である．点i $(i=1,\ldots,n)$を調べる費用は$c(i)$（$\geq 0$）である．$(i,j) \in E$のとき，点iからjへの移動費用は$d(i,j)$ $(>0)$であるとする．$(i,j) \notin E$のときは，iとjとを結ぶ初等的な道に関する移動費用を考え，それを$d(i,j)$とおく．探索者は最悪の場合を想定し，その場合の総費用が最小になるような戦略を選ぶかも知れない．本稿では，特に，目標物も意志を持つと想定して，探索者と目標物の双方がゼロ和ゲームを行なう．このとき，目標物をhiderということにする．探索者は，ゲームの均衡点に対応する戦略を求めるとする立場をとる．探索者の（純粋）戦略は$D=V\backslash\{0\}$上の置換で表すことが出来る．D上の置換$\sigma$に対し，探索者は$\sigma(1),\ldots,\sigma(n)$の順に探索するとする．D上の置換全体の集合を$\Sigma$で表す．hiderが点iにいるとして，探索者が戦略$\sigma \in \Sigma$をとるならば，hiderを発見するまでの費用は，$k=\sigma^{-1}(i)$とおいて，

$$f(i,\sigma)=\sum_{j=1}^{k}\{d(\sigma(j-1),\sigma(j))+c(\sigma(j))\}$$

となる．ここに，$\sigma(0)=0$．hiderの戦略は，どの点に隠れるかということであるから，Dをhiderの戦略全体の集合と考えることが出来る．hider，探索者がそれぞれ戦略$i,\sigma$をとったときの探索費用は$f(i,\sigma)$である．hider，探索者の利得はそれぞれ，$f(i,\sigma)$，$-f(i,\sigma)$であるとする．

以後Gはリニアグラフであると仮定する．さらに、点を調べる費用はどの点についても$c$（$\geq 0$）である．点iとi+1の間の移動費用を$d(i+1), i=0,\ldots,n-1$と表す．このとき、ゲームの値が，$d(0,n)+(n+1)c/2$であることは既に得られている．この事実を応用して次の結果を得る．

**定理１。** 次のような状況を考える：$S(\subseteq D)$に属する点のどれか一つに静止目標物がある．探索者は点0から出発する．点iと点j $(i < j,\ i,j \in S)$の間の移動費用は$d(i,j) = d(i+1) + \dots + d(j)$である．他は上述と同じである．このときのゲームの値は$d(0,i_S) + (|S|+1)c/2$である．ここに、$i_S$はSの要素のうちの最大のものを表し，$|S|$はSに属する点の数を表す．

さてDを施設全体の集合と考える．$S(\subseteq D)$ に属する施設が共同で安全管理を考えるときの総費用負担を$C(S) = d(0,i_S) + (|S|+1)c/2$であると考える．さらに、

$$h(S) = \sum_{i \in S} C(i) - C(S) = \sum_{i \in S, i \neq i_S} d(0,i) + \frac{(|S|-1)c}{2}$$

とおく．$h(S)$は$S(\subseteq D)$ に属する施設がそれぞれ単独で安全管理を考える場合から、共同で安全管理を考えるときの費用の節約と考えることができる．$h(\emptyset) = 0$ と仮定する．順序対$(D,h)$を特性関数型協力ゲームと考える．協力ゲーム $(D,h)$ の pre-imputation 全体の集合を $X(h) = \{ x \in R^n : \Sigma_{i \in D} x_i = h(D) \}$と定義する．

**命題２。** hはconvex、すなわち、$h(S) + h(T) \leqq h(S \cup T) + h(S \cap T)$ for all $S, T \subseteq D$.

命題２によって、協力ゲーム$(D,h)$のコアは空集合ではないことがいえる．さらに、Kernelは一点集合で、コアに含まれる．$d(i) = 1$ for all $i = 1,\dots,n$ を仮定するならば、Kernelは次のようになる．

**定理３。** $x \in K(h)$とする．

(i) $c > 2$ ならば、$x_1 = 1/n + (n-1)c/2n$, $x_i = x_1 + i-1$, $i = 2,\dots,n-1$, かつ $x_n = x_{n-1}$.

(ii) $c < 2$ ならば、$x_n = n-2 + c/2 + (1-c/2)/2^{n-1}$, $x_i = 2^{n-1-i}x_n - (2^{n-1-i}-1)c/2 - \Sigma_{i+1 \leqq u \leqq n-1} u2^{u-i-1}$, $i \leqq n-1$.

## 参考文献


[1] Fishburn,P. and Pollak,H. : Fixed route cost allocation. Amer. Math. Monthly 90(1983), 366-378.

[2] Granot,D. and Granot,F. : On Some Network Flow Games. Math. of Oper. Res. 17(1992), 792-841.

[3] Kikuta,K. : A Search Game with Traveling Cost. J. of the Oper. Res. Soc. of Japan 34(1991), 365-382.

[4] PottersJ., Curiel,I. and Tijs,S. : Traveling Salesman Games. Math. Prog. 53(1992), 199-211.