1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

Mastermind Game における戦略の同等性について(2)

会員番号　　福岡女子大学　*緒方 良江　OGATA Yoshie
会員番号　01106696　福岡女子大学　甲斐 裕　KAI Yu

Mastermind Game は，1972年にアメリカの Invicta Plastics Ltd. によって作られた．codemaker，codebreaker と呼ばれる2人でゲームを行い，codemakerが作成したsecret code をcodebreaker が出来るだけ少ない質問回数で当てるというゲームである．codeは，m 個の position に配置された n 色の peg(Blue，Red，Yellow，Brown，Green，Orange 等)の組み合わせであり，同色の peg を繰り返し配置する場合と，そうでない場合がある．ここでは，peg を繰り返し配置しないものとする．また，codeをそれぞれの peg が配置されている position 番号の組で表し，配置されていないpegについては0 とする．

code全体の集合をCとし，以下の様に定める．

$C \equiv \left\{c=(c_1,c_2,\ldots,c_n)|c_i \in \{0,\ldots,m\}, i=1,\ldots,n, \text{and} \quad \text{if } i \neq 0, c_i \neq c_j \text{for all } i \neq j\right\}$

secret code s のとき，t-th stepまでの question code $q^1,\ldots,q^t$と，それらによる answer $r(s,q^1)=a^1,\ldots,r(s,q^t)=a^t$ のそれぞれを組にした履歴を $h^t=((q^1,a^1),(q^2,a^2),\ldots,(q^t,a^t))$ とおき，このh^tによって得られる可能code集合$C^t(h^t)$ を次のように定める．以下では，$C^t(h^t)=C^t$と省略することにする．

$$C^t(h^t)(=C^t)=\left\{c|r(c,q^1)=a^1,r(c,q^2)=a^2,\ldots,r(c,q^t)=a^t,c\in C\right\}$$

C^tは，h^tによって定まるsの存在する最小の集合である．

戦略とcode分割の関係はtree構造であらわすと，各々の葉（treeの末端）にはcodeが唯一つ存在し，また，全てのsecret codeは，いずれかの葉となっている．ここで，Mastermind Game の最適戦略を平均質問回数を最小にする戦略とする．また，全code集合Cに対して，各要素が等確率でsecret codeとなるとすると，tree構造の各々の葉までのパスには，$1/\#C$の確率があることになる．したがって最適戦略は，treeの全枝数が最小となる戦略ということになる．実際に最適戦略を求めるには，全tree構造を調べねばならず，一方，tree構造の種類は，膨大な量である．そこで，戦略の同等性をtree構造の同等性で考えていく．２つの戦略のtree構造が等しいならば，平均質問回数が同じであるという意味において等価な戦略となる．したがって，ある戦略からその戦略のtree構造が等しい戦略へ変換する関数を考える．任意のstepに対してそのstepまでの履歴を保存する全単射の関数で変換すると，tree構造が等しい戦略となる．

Definition 1 $\pi \equiv \pi'$ *(πとπ'が同等である)*

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^{\exists}\tau : C \to C$全単射

${}^{\forall}t \geq 1, {}^{\forall}h^{t-1} \in H^{t-1}, h^{t-1}=((q^1,a^1),\ldots,(q^{t-1},a^{t-1}))$のとき

$\pi'_t(((\tau(q^1),a^1),\ldots,(\tau(q^{t-1}),a^{t-1})))=\tau(\pi_t(h^{t-1}))$

tree構造について同値類に分類するために，colorとpositionに関するcode変換関数を定義する．

$f_{\alpha\beta}: C \to C$, 各$c=(c_1,\ldots,c_n)$に対して，

$f_{\alpha\beta}(c)=(f_{\alpha\beta}(c)_1=c_1,\ldots,f_{\alpha\beta}(c)_\alpha=c_\beta,\ldots,f_{\alpha\beta}(c)_\beta=c_\alpha,\ldots,f_{\alpha\beta}(c)_n)$

$F=\left\{f_{\alpha\beta}|\alpha\neq\beta,\alpha,\beta\in\{1,\ldots,n\}\right\}$とする．

また，$g_{\mu\nu}: C \to C$, 各$c=(c_1,\ldots,c_n)$に対して$c_\rho=\mu, c_\sigma=\nu$のとき，

$g_{\mu\nu}(c) = (g_{\mu\nu}(c)_1 = c_1, \ldots, g_{\mu\nu}(c)_\sigma = \nu, \ldots, g_{\mu\nu}(c)_\rho = \mu, \ldots, g_{\mu\nu}(c)_n)$ とする．
すなわち，$f_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu}$ となる．$G = \left\{ g_{\mu\nu} | \mu, \nu \in \{1, \ldots, m\} \right\}$ とする．
$T = (F \cup G)^* = \{\tau = \tau_k \tau_{k-1} \ldots \tau_1 | \tau : C \to C, \tau_i \in F \cup G, i = 1, \ldots, k, k \geq 1\}$
ここで，τ(f , gの合成関数) によってtree構造の等しい戦略から戦略への変換を行うことが出来る．t-th step までゲームが進行した時，(t+1)-th step 以降の部分戦略の等価性を考える．tree構造の等しい戦略から戦略への変換で，かつt-th step までの履歴を等しくする関数であれば，(t+1)-step 以降の戦略を等価にする．したがって，履歴h^tに対して、それぞれのquestion をもとのcode と同じにする変換τが存在すれば、ある戦略とその戦略をτで変換した戦略は等価になる．また，(t+1)-th step 以降の戦略が等価であれば，(t+1)-th step での質問も等価になる．

Theorem 1 $\tau(q^1) = q^1, \tau(q^2) = q^2, \ldots, \tau(q^t) = q^t, t \geq 1, \tau \in T$
をみたすτ が存在するとき，(t+1)-th step においてc と$\tau(c)$ はC^tに対して同値な質問である．

任意の$q \in C$に対して，$q = \tau(q)$ をみたすτ の集合を考えるために以下の集合定める．
$\Phi(q) = \{f_{\alpha\beta} | q_\alpha = 0, q_\beta = 0, f_{\alpha\beta} \in F\}$, $\Psi(q) = \{f_{\rho\sigma} g_{\mu\nu} | q_\rho = \mu, q_\sigma = \nu, g_{\mu\nu} \in G, f_{\rho\sigma} \in F\}$.

Theorem 2 *For* $\tau \in T$

$$\tau \in (\Phi(q) \cup \Psi(q))^* \Longleftrightarrow q = \tau(q)$$

また，Theorem 2 を満たす関数の集合$(\Phi(q) \cup \Psi(q))^*$の性質として次のことを示す．

Theorem 3 $^\forall \tau \in (\Phi(q) \cup \Psi(q))^*$に対して，$\tau = \phi_1 \phi_2 \ldots \phi_k \psi_1 \psi_2 \ldots \psi_l$,
$\phi_i \in \Phi(q), \psi_j \in \Psi(q), 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l$と表せ、

$$k \leq n - m - 1, l \leq m - 1$$

したがって，(t+1)-th step においてTheorem 1 , 2 より
$\tau \in ((\Phi(q^1) \cup \Psi(q^1))^*) \cap ((\Phi(q^2) \cup \Psi(q^2))^*) \cap \ldots \cap ((\Phi(q^t) \cup \Psi(q^t))^*)$
$\Longrightarrow$ cと$\tau(c)$ は同値な質問となる．
これを利用して，実際にCを同値類に分類する際に，どの程度のcodeの変換が必要かを考える．$\Phi(q)^*, \Psi(q)^*$は見かけ上無限集合であるが，同値なものを除くと，それぞれ${}_{n-m}C_2$の$n-m-1$回の合成と${}_mC_2$の$m-1$回の合成，この組み合わせ程度の集合となる．また，このTにより任意の$c \in C$に対する同値な質問をすべて見つけることが出来，全code集合Cを同値類で分割できる．また，ステップが進むとTheorem 1を満たす関数は減少し，同値な質問の個数も減少する．すなわち同値類は増える．
最後に戦略の種数がどの程度減少したかにつて検証する．Mastermind Game (n=6, m=4) では，平均正当回数約4.1 回であるので4th step までの戦略の種類を考える．一度行った質問は除く，また，answer の種類は11 でこのうち(4, 0) のときゲーム終了なので枝数は10 となり，1.6×10^{14}となる．3rd step までの質問の同等性を用いて分類した場合，1.0×10^{10} となり，大幅に減少することがわかった．この同等性を用いて戦略種数を減少させれば，最適戦略を実際にコンピュータでreasonable な時間内に求めることが可能となった．