1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

# Inventory Model for Perishable Goods with Returns and Disposals

01401144 関西大学 中井暉久 NAKAI Teruhisa

## §1．はじめに

生鮮食料品・血液・薬品・フィルムなど、腐敗し易く比較的寿命の短い商品に対する在庫管理については、Ghare and Schrader (1963)に始まり、1970年代以降かなりの論文が出ている。これらについては、二つの survey papers [2], [3] を参照して欲しい。

ここでは、新品が次の期へ繰り越されると、中古品扱いとなる商品を対象に、仕入れ元への返品や廃棄処分を考慮した在庫モデルを考える。その際、新品と中古品への需要が互いに独立な場合と、そうでない場合が考えられる。

## §2．独立需要の場合

モデルをつぎのように設定する。

1. 離散時間を考え、$n$ を残り期間とする。
2. 各期で、直前期からの繰り越し品を中古品として引き継ぐ。
   $z_n$：才$n$期に引き継がれた中古品の量 $(z_n \geq 0)$
3. 各期初に新品を注文する。発注した商品は time lag なしですぐ届けられ、その期の需要に供せられる。
   $y_n$：才$n$期の新品仕入れ量 $(y_n \geq 0)$
   $b$：新品仕入れ単価 $(b>0)$
4. 新(中古)品の販売単価は $a_0\ (a_1)$ で、新(中古)品の不足分に対する penalty cost は $p_0\ (p_1)$ である。$(0<b\leq a_0,\ 0<a_1\leq a_0,\ 0\leq p_1\leq p_0)$
5. 新品と中古品に対する需要は互いに独立に発生する。才$n$期における新(中古)品需要を $X_{n,0}\ (X_{n,1})$ とし、その p.d.f. を $f_{n,0}(x)\ (f_{n,1}(x))$、c.d.f. を $F_{n,0}(x)\ (F_{n,1}(x))$ とおく。
6. 各期で売れ残った新品は、仕入れ量の $r\ (0\leq r\leq 1)$ 倍の範囲内で仕入れ元に返品できる。そのさいの返品価格は $c\ (0\leq c\leq b)$ である。
7. 各期の終りに、必要なら cost ゼロでいくらでも廃棄できる。
8. 返品も廃棄もされなかった新品は、中古品として次期へ繰り越される。
   $w_n$：才$n$期からの繰り越し量
   $X_{n,0}=x_{n,0}$ なら $0\leq w_n\leq (y_n-x_{n,0})^+$ である。ここに $a^+\equiv \max\{a,0\}$
   $h$：在庫維持費用 $(0\leq h<a_1)$
9. 各期で売れ残った中古品は、全て廃棄しなければならない。
10. 問題は、$n$期間にわたる総期待利益を最大にする $y_n, w_n$ を求めることである。

$R_n(z_n)$：残り$n$期間で、中古品の初期在庫が $z_n$ の時から出発して、以後最適政策を用いた時の総期待利益

とおくと、つぎのDP方程式が成立する。

$$R_n(z_n)=\max_{y_n(\geq 0)} E\Big[-by_n+a_0(X_{n,0}\wedge y_n)+a_1(X_{n,1}\wedge z_n)-p_0(X_{n,0}-y_n)^+-p_1(X_{n,1}-z_n)^+ + \max_{0\leq w_n\leq (y_n-X_{n,0})^+}\Big\{c\big[\{(y_n-X_{n,0})^+-w_n\}\wedge(ry_n)\big]-hw_n+R_{n-1}(w_n)\Big\}\Big] \quad (1)$$

$$n=1,2,\cdots;\ R_0(z)\equiv 0$$

ただし $a\wedge b\equiv \min\{a,b\}$

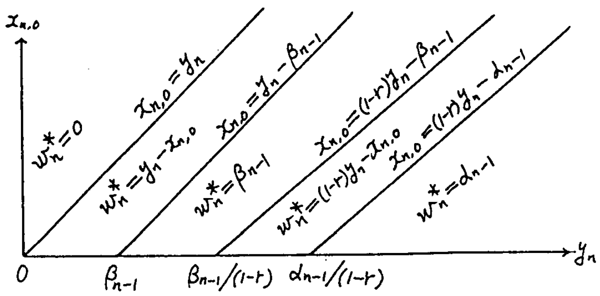
補題1．$R_n(z_n)$ は $z_n$ に関し単調非減少な凹関数である。

定理1．才$n$期の仕入れ量が $y_n$、新品需要量が $x_{n,0}$ の時の最適繰り越し量 $w_n^*$ は図1に示したとおりである。ただし

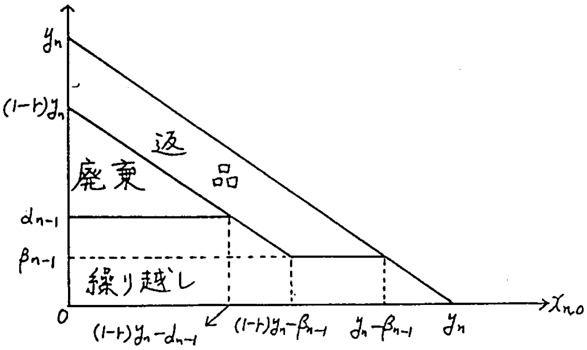
$\alpha_n=F_{n,1}^{-1}(1-h/(a_1+p_1))$, $\beta_n=F_{n,1}^{-1}(1-(c+h)/(a_1+p_1))$

$\alpha_0=\beta_0=0$ である。

特に $y_n>\alpha_{n-1}/(1-r)$ の時の返品・廃棄・繰り越しの各最適量を $x_{n,0}$ の関数として示すと図2のようになる。




図．1




図．2

定理２．オ$n$期の最適仕入量$y_n^*$は、つぎの方程式の解(非負解が必ず存在する）である。

$$
\begin{aligned}
&cr F_{n,0}\left(\left[(1-r)y_n-\alpha_{n-1}\right]^+\right)+\int_{[(1-r)y_n-\alpha_{n-1}]^+}^{[(1-r)y_n-\beta_{n-1}]^+}\Big\{cr-h(1-r)\\
&+(1-r)R'_{n-1}\left[(1-r)y_n-x\right]\Big\}f_{n,0}(x)\,dx\\
&+c\left\{F_{n,0}\left([y_n-\beta_{n-1}]^+\right)-F_{n,0}\left([(1-r)y_n-\beta_{n-1}]^+\right)\right\}\\
&+\int_{(y_n-\beta_{n-1})^+}^{y_n}\left\{-h+R'_{n-1}(y_n-x)\right\}f_{n,0}(x)\,dx\\
&+(a_0+p_0)\overline{F}_{n,0}(y_n)=b \qquad (2)
\end{aligned}
$$

ただし $\overline{F}(\cdot)\equiv 1-F(\cdot)$

〈注〉(i) $y_n^*$も$w_n^*$も$z_n$に無関係である。

(ii) $f_{n,0}(x)$, $f_{n,1}(x)$がともに$n$に無関係なら、$n(\geq 2)$の時は最適政策が毎期同じである。

## §3．需要が独立でない場合

§2のモデルと次の三点で異なる。

1．各期で、新品と中古品に共通の需要を考える。オ$n$期の需要を$X_n$とし、そのp.d.f.を$f_n(x)$, c.d.f.を$F_n(x)$とおく。

2．需要$X_n$のうち、割合$\lambda_0(\lambda_1)$が新(中古)品に対する需要である。($\lambda_0+\lambda_1=1$)

3．新(中古)品がない時、新(中古)品に対する需要者が中古(新)品を求める確率は$\mu_0(\mu_1)$である。

$S_n(z_n)$：最適政策による総期待利益とおくと、つぎのDP方程式が成立する。

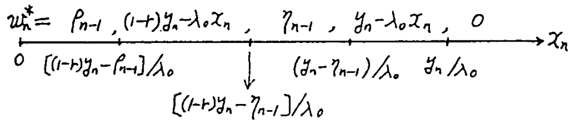
$$
\begin{aligned}
S_n(z_n)=\max_{y_n(\geq 0)} E\Big[&-by_n\\
&+a_0\left\{(\lambda_0X_n)\wedge y_n+\left[\mu_1(\lambda_1X_n-z_n)^+\right]\wedge(y_n-\lambda_0X_n)^+\right\}\\
&+a_1\left\{(\lambda_1X_n)\wedge z_n+\left[\mu_0(\lambda_0X_n-y_n)^+\right]\wedge(z_n-\lambda_1X_n)^+\right\}\\
&-p_0\left[\mu_1(\lambda_1X_n-z_n)^+-(y_n-\lambda_0X_n)^+\right]^+\\
&-p_1\left[\mu_0(\lambda_0X_n-y_n)^+-(z_n-\lambda_1X_n)^+\right]^+\\
&+\max_{0\leq w_n\leq\left[(y_n-\lambda_0X_n)^+-\mu_1(\lambda_1X_n-z_n)^+\right]^+}\Big\{\\
&c\left(\left\{\left[(y_n-\lambda_0X_n)^+-\mu_1(\lambda_1X_n-z_n)^+\right]^+-w_n\right\}\wedge(ry_n)\right)\\
&-hw_n+S_{n-1}(w_n)\Big\}\Big] \qquad (3)
\end{aligned}
$$

$$n=1,2,\cdots;\quad S_0(z)\equiv 0$$

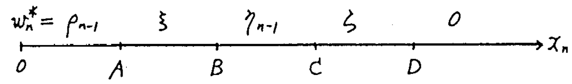
定理３．オ$n$期の仕入量が$y_n$、需要が$x_n$の時の最適繰り越し量$w_n^*$は次のとおり：

$\rho_n\equiv S_n'^{-1}(h)$，$\eta_n\equiv S_n'^{-1}(c+h)$ とおく。

(i) $y_n/\lambda_0\leq z_n/\lambda_1$ または $y_n/\lambda_0\geq z_n/\lambda_1\geq x_n$ の時




(ii) $y_n/\lambda_0\geq z_n/\lambda_1$ かつ $z_n/\lambda_1\leq x_n$ の時




ただし
$$
\begin{aligned}
\xi&=(1-r)y_n-\lambda_0x_n-\mu_1(\lambda_1x_n-z_n)\\
\zeta&=y_n-\lambda_0x_n-\mu_1(\lambda_1x_n-z_n)\\
A&=\left[(1-r)y_n-\rho_{n-1}+\mu_1z_n\right]/(\lambda_0+\lambda_1\mu_1)\\
B&=\left[(1-r)y_n-\eta_{n-1}+\mu_1z_n\right]/(\lambda_0+\lambda_1\mu_1)\\
C&=\left[y_n+\mu_1z_n-\eta_{n-1}\right]/(\lambda_0+\lambda_1\mu_1)\\
D&=(y_n+\mu_1z_n)/(\lambda_0+\lambda_1\mu_1)
\end{aligned}
$$

最適な$y_n^*$を解析的に求めることは、場合分けが繁雑でとても出来ない。

〈注〉多期間寿命への拡張も可能である。


References

[1] P.M. Ghare and G.F. Schrader, J. Indust. Engng., Vol 14 (1963), 238-243.

[2] S. Nahmias, Opns. Res., Vol. 30 (1982), No. 4, 680-708

[3] F. Raafat, J. Opl. Res. Soc., Vol. 42 (1991) No. 1, 27-37.