1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

領域グラフにおける全節点・領域間の k-枝連結性の必要十分条件

01009550　NTT通信網研究所　伊藤大雄　ITO Hiro

1．はじめに

通信網の強度を評価するのに、交換機を節点に対応させてグラフにモデル化して連結度で評価するのが効果的である。通信網では複数の交換機が集まって一つの論理的な領域を形成していることがある。通信は、その領域（交換機の集まり）を目的地として経路を選択し、領域内のどれかの交換機に着信すれば、目的となる着端末まで通信路を確保することができる。つまり、着領域のどれか一つの交換機に接続しさえすれば良い。そこでこの場合重要なのは、節点間の連結度ではなく、節点と領域（節点の部分集合）の連結度であると言える。

筆者は、節点と領域の連結度としてNA連結(node-to-area connection)という概念を導入し、その性質をいくつか明かにした[1]-[4]。NA連結は従来からある連結の概念を一般化したものであるが、[3]ではNA連結をさらに、点連結度や枝連結度の一般化である、T-独立な経路数の上にも拡張できることを示した。また[4]では2-NA枝連結性の線形時間判定アルゴリズムを示した。本稿ではこの考え方を拡張してk-NA枝連結性の必要十分条件を示す。この条件から し、k-NA枝連結性の高速判定アルゴリズムを作ることが出来る。

2．諸定義

【定義】 $G=(V,E)$：無向多重グラフ。
　V：節点集合、E：枝集合。
　Vの部分集合族$X=\{V_1,V_2,\cdots,V_{|X|}\}$（$\cup_{i=1,2,\cdots,|X|}V_i=V$かつ$V_i\cap V_j=\phi$（$i\neq j$））とグラフGの組合わせを、**領域グラフ**と呼び、$G^{**}=(G,X)$で表す。各V_iを**領域**と呼ぶ。□

【定義】 枝はその接続している2節点x，$y\in V$を用いて$e(x,y)$の様に表すこともある。2つの節点部分集合W_1, $W_2\subseteq V$に対し、$E(W_1, W_2)=\{e(x,y)\mid x\in W_1, y\in W_2\}$とする。Vの空でない真部分集合$W\subset V$に対し、$E(W, V-W)$をカットといい、k本の枝から構成されるカットのことをk-カットという。カット$E(W,V-W)$が節点部分集合$U\subseteq V$を**横切る**とは、$U\cap W\neq\phi$かつ$U\cap V-W\neq\phi$であることを意味する。また節点部分集合U_1, $U_2\subset V$に対し$U_1\subseteq W$かつ$U_2\subseteq V-W$であるとき、カット$E(W,V-W)$はU_1とU_2を**分離する**と言う。□

【定義】 グラフ$G=(V,E)$の$x\in V$と$W\subseteq V-\{x\}$について、$\forall F\subseteq V$ ($|F|\leqq k-1$)をGより除去したグラフG-Fにおいて、xと$\exists y\in W$が連結である時、xとWは**k-NA枝連結**であると言う。また、領域グラフ$G^{**}=(G,X)$の$\forall x\in V$と$\forall V_i\in X$（$x\in V-V_i$）について、xとV_iがk-NA枝連結である時、G^{**}はk-NA枝連結であると言う。また、k-NA枝連結である最大のkを**NA枝連結度**と呼び、$\lambda(x,V_i;G^{**})$, $\lambda(G^{**})$等と表記する。□

【定義】k-NA枝連結性判定問題（但し、kは定数）
　入力：領域グラフ$G^{**}=(G=(V,E), X)$
　要請：G^{**}はk-NA枝連結であるか否かを判定せよ。□

3．k-NA枝連結性の必要十分条件

グラフ$G=(V,E)$の節点はk-枝連結性に関する同値類に分割できることが知られている。即ち、Vの分割$C(k)_1, C(k)_2, \ldots, C(k)_{K(k)}$ ($\cup_{i=1}^{K(k)}C(k)_i=V$, $C(k)_i\cap C(k)_j=\phi$ for $i\neq j$)で、「$x,y\in\exists C(k)_i\longleftrightarrow\lambda(x,y)\geqq k$」である様なものが存在する。$C(k)_i$に空集合を認めないとすると、kに関しこの分割は一意に定まり、その時の各$C(k)_i$を**k-枝連結成分**と呼ぶ。領域グラフ$G^{**}=(G,X)$のk-NA枝連結性の判定問題に対し、Gのk-枝連結成分が利用できる。

【定理1】領域グラフ$G^{+a}=(G=(V,E), X)$がk-NA枝連結である必要十分条件は、
　全ての$h\in\{1,2,\cdots,k\}$に対し、全てのh-枝連結成分$C(h)_i$が
　(1)全ての領域内の節点を少なくとも一つずつ含む。
　(2)$|E(C(h)_i, V-C(h)_i)|\geqq k$
のどちらかを満たすことである。□

定理1の証明に必要な性質を次に補題として示しておく。

【補題1】グラフ$G=(V, E)$において、$|E(W_0, V-W_0)|<k$であるカット$E(W_0, V-W_0)$, $W_0\subset V$が存在するならば、ある$h\leqq k$に対しh-枝連結成分Cが存在して、$C\subseteq W_0$かつ$|E(C, V-C)|<k$を満たす。□

証明）$|E(W, V-W)|=i-1<k$である空でない$W\subseteq W_0$を一つ選ぶ。（$W=W_0$としても良いので必ず選ぶことができる。）カット$E(W,V-W)$が、あるj-枝連結成分Cを横切るとする。すると$k\geqq i>j$でなければならない。ここで$W-C\neq\phi$であると仮定する。

節点$x\in W-C$が存在し、xとCを分離するカット$E(U,V-U)$, $x\in U$, $C\subseteq V-U$, $|E(U,V-U)|<j$が存在する。表記を簡単にする

ために、$W_1=W\cap U$, $W_2=W-U$, $W_3=U-W$, $W_4=V-W-U$と書くことにする。

$$i-1=|E(W,V-W)|$$
$$=|E(W_1,W_3)|+|E(W_1,W_4)|+|E(W_2,W_3)|+|E(W_2,W_4)|$$
$$j-1\geqq|E(U,V-U)|$$
$$=|E(W_1,W_2)|+|E(W_1,W_4)|+|E(W_2,W_3)|+|E(W_3,W_4)|$$

$i>j$であることを考慮すると

$$|E(W_1,W_3)|+|E(W_2,W_4)|>|E(W_1,W_2)|+|E(W_3,W_4)|$$

が成り立つ。ここで$|E(W_2,W_4)|<|E(W_1,W_2)|$と仮定すると、

$$|E(W_4, W_1\cup W_2\cup W_3)|$$
$$=|E(W_1,W_4)|+|E(W_2,W_4)|+|E(W_3,W_4)|$$
$$<|E(W_1,W_4)|+|E(W_1,W_2)|+|E(W_3,W_4)|\leqq|E(U,V-U)|<j$$

カットE(W, V-W)がCを横切ることから、2節点$x\in C\cap W\subseteq W_2$と$y\in C-W\subseteq W_4$が存在する。ところがxとyはカット$E(W_4, W_1\cup W_2\cup W_3)$によって分離され、Cがj-枝連結成分であることに反する。故に$|E(W_2,W_4)|\geqq|E(W_1,W_2)|$でなければならない。すると

$$|E(W_1, W_2\cup W_3\cup W_4)|$$
$$=|E(W_1,W_2)|+|E(W_1,W_3)|+|E(W_1,W_4)|$$
$$\leqq|E(W_2,W_4)|+|E(W_1,W_3)|+|E(W_1,W_4)|\leqq|E(W,V-W)|=i-1$$

となる。W_1がWに真に含まれることから、W_1を改めてWと置き直すことにより、真に小さいWを得ることが出来る。$W-C\neq\phi$である限りこの操作を繰り返すことが出来る。すなわち、$|E(W, V-W)|=i-1<k$である空でない$W\subseteq W_0$を、カットE(W, V-W)が横切る全てのj-枝連結成分Cに対して、$W-C=\phi$である様に選ぶことが出来る。

こうして選んだWに対し、カットE(W, V-W)がある(j-1)-枝連結成分Cは横切るが、どのj-枝連結成分も横切らないとする。当然$j\leqq i\leqq k$である。この時、Wが2つ以上のj-枝連結成分C_1, C_2, …を含むとする。するとC_1とC_2を分離するカットE(U, V-U), $C_1\subseteq U$, $C_2\subseteq V-U$, $|E(U,V-U)|<j$が存在する。ここで表記を簡単にするために、$W_1=W\cap U$, $W_2=W-U$, $W_3=U-W$, $W_4=V-W-U$と書くことにする。

もし$|E(W_2,W_4)|<|E(W_1,W_2)|$ならば、

$$|E(W_4, W_1\cup W_2\cup W_3)|$$
$$=|E(W_1,W_4)|+|E(W_2,W_4)|+|E(W_3,W_4)|$$
$$<|E(W_1,W_4)|+|E(W_1,W_2)|+|E(W_3,W_4)|\leqq|E(U,V-U)|\leqq j-1$$

となるので、$W_4\cap C=\phi$でなければならない($\because W_4\cap C\neq\phi$だと、カット$E(W_4, W_1\cup W_2\cup W_3)$がCを横切り、Cが(j-1)-枝連結成分であることに反する。)同様にもし$|E(W_1,W_3)|<|E(W_1,W_2)|$ならば、$W_3\cap C=\phi$でなければならない。カットE(W, V-W)がCを横切ることから、$(W_3\cup W_4)\cap C\neq\phi$でなければならない。よって$|E(W_2,W_4)|\geqq|E(W_1,W_2)|$または$|E(W_1,W_3)|\geqq|E(W_1,W_2)|$である。よって一般性を失うこと無く、$|E(W_2,W_4)|\geqq|E(W_1,W_2)|$とできる。

$$|E(W_1, W_2\cup W_3\cup W_4)|$$
$$=|E(W_1,W_2)|+|E(W_1,W_3)|+|E(W_1,W_4)|$$
$$\leqq|E(W_2,W_4)|+|E(W_1,W_3)|+|E(W_1,W_4)|\leqq|E(W,V-W)|=i-1$$

となる。W_1がWに真に含まれることから、W_1を改めてWと置き直すことにより、真に小さいWを得ることが出来る。Wが2つ以上のj-枝連結成分を含む限りこの操作を繰り返すことが出来る。すなわち、Wが唯一つのj-枝連結成分を含む様に選ぶことが出来る。そこで、C=W, h=jとおくと、求めるh-枝連結成分Cが得られている。(補題1の証明了)

定理1の証明) まず必要性を示す。対偶を示すため、条件を満たさないと仮定する。すなわち、ある$h\in\{1, 2, \cdots, k\}$に対し、(1)と(2)のどちらも満たさないh-枝連結成分$C(h)_i$が存在すると仮定する。この時、カット$E(C(h)_i, V-C(h)_i)$を考えると、$|E(C(h)_i, V-C(h)_i)|<k$かつ$C(h)_i$はある領域の節点を含まない。よってG^{**}はk-NA枝連結でない。以上から必要性が示された。

次に十分性を示す。対偶を示すため、G^{**}はk-NA枝連結でないと仮定する。すなわち、ある領域$V_1\in X$, 節点$x\in V-V_1$に対し、カットE(W, V-W), $x\in W$, $V_1\subseteq V-W$, $|E(W, V-W)|<k$が存在する。補題1より、ある$h\leqq k$に対し、h-枝連結成分Cが存在して、$C\subseteq W$かつ$|E(W, V-W)|<k$をみたす。$C\subseteq W\subseteq V-V_1$なのでCは$V_1$の節点を一つも含まない。よってCが条件(1)と(2)を両方とも満たさない。よって十分性も示された。(定理1の証明了)

4. まとめ

本稿ではk-NA枝連結性の、必要十分条件を示した。これを用いて、k-NA枝連結性を判定する高速アルゴリズムが構築できる。特に$k\leqq 3$については、線形時間が保証される。このアルゴリズムについては別途説明する。

謝辞 貴重な御意見を頂いた、京都大学工学部の茨木俊秀教授ならびに永持仁助教授、そしてNTTネットワーク総合技術センタの井上明也担当課長に感謝致します。

参考文献

[1] 伊藤大雄, "グラフにおける節点・領域連結度について," 電気学会論分誌C, Vol. 114-C, No.4, pp.463-469, 1994.

[2] Ito H., "Connectivity problem on area graphs for locally striking disasters —Direct NA-connection," IEICE Transactions, Special Section of Selected Papers from the 7th Karuizawa Workshop on Circuits and Systems, Vol. E78-A, No. 3, 1995. (掲載予定)

[3] 伊藤大雄, 永持仁, "T-混合カットにおける領域間連結度の性質," OR学会春期研究発表会アブストラクト集, pp. 219-220, 1994.

[4] 伊藤大雄, "節点・領域間の2-枝連結性の線形時間判定法," OR学会秋期研究発表会アブストラクト集, pp. 56-57, 1994.