1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

ファジィ利得を伴う動的ファジィ・システムの最適停止問題について

01702986　北九州大学　吉田祐治　YOSHIDA Yuji

論文 [1, 3, 4, 5] の動的ファジィ・システムにおいて、ファジィ利得の最適停止問題についてについて考える.

1. 動的ファジィ・システム. E をある距離空間とする. E上のファジィ集合をメンバーシップ関数 $\tilde{s}: E \mapsto [0,1]$ で表し、上半連続で normal な E上のファジィ集合の全体を $\mathcal{F}(E)$ と置く. 連続なファジィ関係 $\tilde{q}: E \times E \mapsto [0,1]$ で $\tilde{q}(x,\cdot) \in \mathcal{F}(E)$ $(x \in E)$ を満たすものを考え、システムの各時刻でのファジィ状態列 $\{\tilde{s}_n\}_{n=0}^{\infty}$ を論文 [1] に従いつぎのように与える：初期ファジィ状態を $\tilde{s} \in \mathcal{F}(E)$ として

$$\tilde{s}_0 := \tilde{s} \quad \text{and} \quad \tilde{s}_{n+1}(y) := \sup_{x \in E} \min\{\tilde{s}_n(x), \tilde{q}(x,y)\}, \quad y \in E,\ n = 0,1,2,\cdots. \tag{1}$$

つぎにファジィ利得を考えるために、非負ファジィ数を導入する. 負でない実数の全体を $\mathbf{R}_+$とし、$\mathbf{R}_+$上のファジィ集合 $\tilde{a}$ について α-cut $\tilde{a}_\alpha$ を

$$\tilde{a}_\alpha := \{z \in \mathbf{R}_+ \mid \tilde{a}(z) \geq \alpha\}\ (\alpha \in (0,1]) \quad \text{and} \quad \tilde{a}_0 := \mathrm{cl}\{z \in \mathbf{R}_+ \mid \tilde{a}(z) > 0\}$$

と置く. ただし、cl は集合の閉包を表す. ここでは、このファジィ集合 $\tilde{a}$ がつぎの条件 (N1) — (N3) を満たすとき非負ファジィ数と呼ぶ.

(N1) α-cut $\tilde{a}_\alpha$ が $\mathbf{R}_+$ の有界閉区間である $(\alpha \in [0,1])$. その区間を $[\tilde{a}_\alpha^-, \tilde{a}_\alpha^+]$ と表す.

(N2) $\bigcap_{\alpha' < \alpha} \tilde{a}_{\alpha'} = \tilde{a}_\alpha$ for $\alpha > 0$.

(N3) $\tilde{a}$ は normal, つまり $\sup_{z \in \mathbf{R}_+} \tilde{a}(z) = 1$.

非負ファジィ数の全体を $\mathcal{F}_n(\mathbf{R}_+)$ と表す. さらに、ファジィ数の和、スカラーとの積、半順序を α-cut でつぎのように与える.

$$(\tilde{a} + \tilde{b})_\alpha = [\tilde{a}_\alpha^- + \tilde{b}_\alpha^-, \tilde{a}_\alpha^+ + \tilde{b}_\alpha^+], \quad (\lambda \tilde{a})_\alpha = [\lambda \tilde{a}_\alpha^-, \lambda \tilde{a}_\alpha^+], \quad \alpha \in [0,1],$$

$$\tilde{a} \succeq \tilde{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{a}_\alpha^- \geq \tilde{b}_\alpha^- \quad \text{and} \quad \tilde{a}_\alpha^+ \geq \tilde{b}_\alpha^+ \quad \text{for all } \alpha \in [0,1].$$

また、$\vee$ はこの半順序によるファジィ数の maxinum を表す：

$$(\tilde{a} \vee \tilde{b})_\alpha = [\max\{\tilde{a}_\alpha^-, \tilde{b}_\alpha^-\}, \max\{\tilde{a}_\alpha^+, \tilde{b}_\alpha^+\}], \quad \alpha \in [0,1].$$

写像 $\tilde{f}: \mathcal{F}(E) \mapsto \mathcal{F}_n(\mathbf{R}_+)$ の全体を $\mathcal{F}(E:\mathbf{R}_+)$ とし、$\mathcal{F}(E:\mathbf{R}_+)$ 上の和、スカラーとの積、maxinum をつぎのように与える：各 $\tilde{f}, \tilde{h} \in \mathcal{F}(E:\mathbf{R}_+)$, $\lambda \geq 0$ に対して

$$(\tilde{f} + \tilde{h})(\tilde{s}) := \tilde{f}(\tilde{s}) + \tilde{h}(\tilde{s}), \quad (\lambda \tilde{f})(\tilde{s}) := \lambda \tilde{f}(\tilde{s}), \quad (\tilde{f} \vee \tilde{h})(\tilde{s}) := \tilde{f}(\tilde{s}) \vee \tilde{h}(\tilde{s}), \quad \tilde{s} \in \mathcal{F}(E).$$

また、$\mathcal{F}(E:\mathbf{R}_+)$ 上のノルムをつぎのように置く：

$$\|\tilde{f}\| := \sup_{\alpha \in [0,1], \tilde{s} \in \mathcal{F}(E)} \delta(\tilde{f}(\tilde{s})_\alpha, \{0\}) \quad \text{for } \tilde{f} \in \mathcal{F}(E:\mathbf{R}_+).$$

ただし、δ は $\mathbf{R}_+$の有界閉区間全体上の Hausdorff 距離.

定数 β $(0 < \beta < 1)$ を割引率とし、$\tilde{r}, \tilde{c} \in \mathcal{F}(E:\mathbf{R}_+)$ はそのノルムが有限であるとする. $\tilde{r}(\tilde{s}_n)$ と $\tilde{c}(\tilde{s}_n)$ は、ファジィ状態 $\tilde{s}_n$ での running fuzzy reward と terminal fuzzy reward を表す. このとき、時刻 m までの fuzzy reward の総和は (論文 [4,5] を参考にして)

$$\tilde{u}(\tilde{s}, m) := \sum_{n=0}^{m-1} \beta^n \tilde{r}(\tilde{s}_n) + \beta^m \tilde{c}(\tilde{s}_m) \quad \text{for } \tilde{s} \in \mathcal{F}(E),\ m \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}. \tag{2}$$

ただし、$\{\tilde{s}_n\}_{n=0}^{\infty}$ は (1) で与えられたもの、また、$\sum_{n=0}^{0-1}\beta^n\tilde{r}(\tilde{s}_n) := 1_{\{0\}}$ とする．ここで、fuzzy goal $\tilde{g} : \mathbf{R}_+ \mapsto [0,1]$ を連続、非減少で $\tilde{g}(0) = 0$ と $\lim_{z\to\infty}\tilde{g}(z) = 1$ を満たすとし、つぎの問題を考える．

問題 1.1. つぎのファジィ期待値を時刻 $m \in \mathbf{N}\cup\{\infty\}$ に関して最大にせよ．

$$\tilde{E}(\tilde{u}(\tilde{s},m)) := \int_{\mathbf{R}_+} \tilde{u}(\tilde{s},m)(z)\ \mathrm{d}\tilde{P}(z) = \sup_{z\in\mathbf{R}_+} \min\{\tilde{u}(\tilde{s},m)(z), \tilde{g}(z)\} \tag{3}$$

ここに、$\tilde{P}$ は $\tilde{g}$ を密度関数とする possibility 測度で $\int \mathrm{d}\tilde{P}$ は菅野積分を表す．

このファジィ積分はファジィ利得の満足度を表す．他方、fuzzy max order $\succeq$ による最適ファジィ利得を

$$\tilde{v}(\tilde{s}) := \bigvee_{m\geq 0} \tilde{u}(\tilde{s},m) = \bigvee_{m\geq 0}\left\{\sum_{n=0}^{m-1}\beta^n\tilde{r}(\tilde{s}_n) + \beta^m\tilde{c}(\tilde{s}_m)\right\} \quad \text{for } \tilde{s}\in\mathcal{F}(E) \tag{4}$$

と置く．ただし、$\vee$ は fuzzy max order $\succeq$ に関する上限を表す．論文 [2] では、ファジィ決定過程でこのタイプの利得を論じている．このとき、つぎの問題が考えられる．

問題 1.2. 最適ファジィ利得のファジィ期待値に等しくなる停止時刻 m を求めよ．

$$\tilde{E}(\tilde{u}(\tilde{s},m)) = \tilde{E}(\tilde{v}(\tilde{s})). \tag{5}$$

2. 最適期待ファジィ利得と最適停止時刻.

定理 2.1. 最適ファジィ利得 $\tilde{v}\in\mathcal{F}(E:\mathbf{R}_+)$ は、つぎのファジィ関係方程式の一意解である：

$$\tilde{v}(\tilde{s}) = \tilde{c}(\tilde{s}) \vee \{\tilde{r}(\tilde{s}) + \beta\tilde{v}(\tilde{q}(\tilde{s}))\} \quad \text{for } \tilde{s}\in\mathcal{F}(E). \tag{6}$$

初期ファジィ状態 $\tilde{s}\in\mathcal{F}(E)$ を固定して、レベル α^* をつぎのように定義する．

$$\alpha^* := \sup\{\alpha\in[0,1] |\ \tilde{g}_\alpha^- \leq \tilde{v}(\tilde{s})_\alpha^+\}. \tag{7}$$

定理 2.2. このとき、つぎの式が成り立つ：

$$\alpha^* = \tilde{E}(\tilde{v}(\tilde{s})) = \sup_{m\geq 0}\tilde{E}(\tilde{u}(\tilde{s},m)). \tag{8}$$

したがって、問題 1.1 の最適ファジィ期待値と問題 1.2 の最適ファジィ期待値は一致する．

さらに、つぎの時刻を考える．

$$m^* := \inf\{m\in\mathbf{N} \mid \tilde{v}(\tilde{s}_m)_{\alpha^*}^+ = \tilde{c}(\tilde{s}_m)_{\alpha^*}^+\}. \tag{9}$$

ただし、$\{\cdot\} = \emptyset$ の場合は、$+\infty$ とする．

定理 2.3. m^* が有限ならば、m^* は問題 1.1 の最適停止時刻である．さらに、$\alpha \mapsto \tilde{g}_\alpha^-$ が $(0,1)$ 上で単調増加ならば、m^* 最適停止時刻の中で最小時刻である．

参考文献

[1] M.Kurano, M.Yasuda, J.Nakagami and Y.Yoshida, A limit theorem in some dynamic fuzzy systems, *Fuzzy Sets and Systems* **51** (1992) 83 - 88.
[2] M.Kurano, M.Yasuda, J.Nakagami and Y.Yoshida, Markov-type fuzzy decision processes with a discounted reward on a closed interval, *Tech. Rep. of Math. Sci., Chiba Univ.*, No.10, Vol.4 (1992).
[3] Y.Yoshida, Markov chains with a transition possibility measure and fuzzy dynamic programming, *Fuzzy Sets and Systems* **66** (1994) 39 - 57.
[4] Y.Yoshida, M.Yasuda, J.Nakagami and M.Kurano, A potential of fuzzy relations with a linear structure : The contractive case, *Fuzzy Sets and Systems* **60** (1993) 283 - 294.
[5] Y.Yoshida, M.Yasuda, J.Nakagami and M.Kurano, A potential of fuzzy relations with a linear structure : The unbounded case, *Fuzzy Sets and Systems* **66** (1994) 83 - 95.