1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

遭難者の寿命を考慮した最適捜索計画

02003710 海上保安庁 *稲田 健二 INADA Kenji
01000890 防衛大学校 飯田 耕司 IIDA Koji
01504810 防衛大学校 宝崎 隆祐 HOHZAKI Ryusuke

1 はじめに

荒天下の海難事故の救難捜索では，探索者は漂流・移動する遭難者（以下，目標物という）を生存中に発見することが重要であり，また探索者の2重遭難のリスク回避も勘案しなければならない．この問題は目標物の死亡に伴う目標価値の変化と探索コストを考慮した期待利得最大化の移動目標探索問題として定式化される．従来，目標物の寿命を考慮した最適探索努力配分の研究では，静止目標物については発見確率の最大化[1]や期待利得最大化[2,3]の最適解の条件が求められているが，移動目標物については発見確率最大化問題[4]しか解かれていない．本研究は，1つの確率的なパラメータの値で目標物の漂流経路が決まる場合（条件付決定論的移動目標物という）を考え，捜索の期待利得（＝期待獲得価値（死亡目標は価値0とする）－期待捜索コスト）を最大にする最適捜索努力配分と最適捜索打ち切り時点の条件を求め，その性質を明らかにしたものである．

2 モデルの前提及び定式化

本研究のモデルの前提は以下のとおりである．

(1) 目標空間Y内に1つの目標物が存在し，捜索は時間$T=[t_0,T](0\leqq t_0<T<\infty)$の間に行われる．

(2) 目標物の時点tの位置yは，確率密度$f(x)$に従うパラメータxの関数$y=\eta_t(x)$によって一意的に決まり，目標物の移動経路は $\eta(x)=\{\eta_t(x),t\in T\}$，また時点tにyを通る経路のxの集合は$\{x=\eta_t^{-1}(y)\}$で表される．

(3) 時点tで地点yに配分される単位時間当りの捜索努力密度を$\phi(y,t)$と書く．したがって捜索の努力配分は，$\phi=\{\phi(y,t),y\in Y,t\in T\}$で表される．

(4) 捜索は単位努力密度当り$c(y)$のコストがかかり，時点tの総捜索コスト$C(t,\phi)$は次式で表される．

$$C(t,\phi)=\int_Y c(y)\phi(y,t)\,dy. \tag{1}$$

ここに時点tの総コストは$\Psi(t)$で制限され，$\Psi(t)$は任意の大きさに分割可能であり，$\{\Psi(t),\ t\in T\}$は捜索者に既知であるとする．また時点tまでの総累積捜索コスト$D(t,\phi)$は次式で表される．

$$D(t,\phi)=\int_{t_0}^{t}\int_Y c(y)\phi(y,s)\,dy\,ds. \tag{2}$$

(5) 時点tで捜索者が生存中の目標物を発見した場合，価値$R(t)(>0)$を得る．死亡目標は価値0とする．

(6) 地点yの目標物の瞬間死亡率を$q(y)$とする．パラメータxをとった目標物が，時点tで生存している確率$Q(t\mid x)$は次式で表される．

$$Q(t\mid x)=Q_0(x)\exp\left(-\int_0^t q(\eta_s(x))\,ds\right). \tag{3}$$

ただし$Q_0(x)$はxをとる目標物の$t=0$の生存確率．

(7) 地点yに目標物が存在するときの捜索の条件付瞬間探知率は，目標の生死にかかわらず$b(y)$とし，各時点の探知事象は独立と仮定する．

以上の前提の下に問題を定式化する．パラメータxをとる目標物が時点tまで未探知の確率は次式となる．

$$\bar{P}(t,\phi\mid x)=\exp\left(-\int_{t_0}^{t} b(\eta_s(x))\phi(\eta_s(x),s)\,ds\right). \tag{4}$$

ゆえにパラメータxをとる目標物の時点tの探知確率密度は次式で表される．

$$\begin{aligned}p(t,\phi\mid x)&=b(\eta_t(x))\phi(\eta_t(x),t)\,\bar{P}(t,\phi\mid x)\\&=b(\eta_t(x))\phi(\eta_t(x),t)\\&\quad\times\exp\left(-\int_{t_0}^{t} b(\eta_s(x))\phi(\eta_s(x),s)\,ds\right).\end{aligned} \tag{5}$$

上式より$[t_0,T]$の捜索の期待利得は次式で表される．

$$V(\phi,T)=\int_X f(x)\left[\int_{t_0}^{T} p(t,\phi\mid x)\{Q(t\mid x)R(t)-D(t,\phi)\}\,dt-\bar{P}(T,\phi\mid x)\,D(T,\phi)\right]dx. \tag{6}$$

したがって上述の問題は，

制約条件； $\phi(y,t)\geqq 0,\quad y\in Y,\quad t\in T,$ (7)

$C(t,\phi)\leqq \Psi(t),\quad t\in T,$ (8)

の下で，式(6)の期待利得$V(\phi,T)$を最大にする最適捜索計画(ϕ^*,T^*)を求める問題として定式化される．

3 最適捜索計画

打ち切り時点Tが与えられたときの条件付最適努力配分をϕ_T^*，条件付最大利得を与えるTの最小値を$T^0=\min\{T\mid \max_T V(\phi_T^*,T)\}$，と定義する．このとき次の定理が成り立つ．

［定理１］　条件付最適努力配分ϕ_T^*の必要条件は次式で与えられる（複号同順）．

$\phi_T^*(y,t) \geqq 0$ならば

$$\Big[\int_{\{x=\eta_t^{-1}(y)\}} f(x)\Big\{\overline{P}(t,\phi_T^*\mid x)\,b(y)\Big\{Q(t|x)R(t)+\Big[\int_t^T p^t(\tau,\phi_T^*|x)\times (D^t(\tau,\phi_T^*)-Q(\tau|x)R(\tau))d\tau+\overline{P}^t(T,\phi_T^*|x)D^t(T,\phi_T^*)\Big]\Big\}\Big\}dx - \int_X c(y)f(x)\overline{P}(t,\phi_T^*|x)dx\Big]\Big/c(y) \begin{matrix} = \\ \leqq \end{matrix} \lambda(t) \tag{9}$$

を満たす非負の$\lambda(t)$が存在する．ただし$D^t(\tau,\phi_T^*)$, $\overline{P}^t(T,\phi_T^*\mid x)$, $p^t(t,\phi_T^*\mid x)$はそれぞれ(2),(4),(5)式中の積分範囲$[t_0,t]$を$[t,\tau]$に変更した式である．

［系１・１］　ϕ_T^*が制約努力量の全量を投入する計画の場合，式(9)の$\lambda(t)>0$，使い残しがある場合，$\lambda(t)=0$である．

［定理２］　条件付最適捜索打ち切り時点T^0の必要条件は次式で表される（複合同順）．

$T \lesseqqgtr T^0$ ならば

$$\frac{\int_X f(x)\overline{P}(T,\phi_T^*|x)b(y)\phi_T^*(y,T)Q(T|x)R(t)dx}{\int_X f(x)\overline{P}(T,\phi_T^*|x)dx} \gtreqqless C(T,\phi_T^*) \tag{10}$$

［定理３］　最適捜索計画(ϕ^*,T^*)は次式を満足する．

$$V(\phi^*,T^*)=V(\phi^*_{T0},T^0).$$

ゆえに最適捜索計画(ϕ^*,T^*)は(ϕ^*_{T0},T^0)で求められる．

4　考察

(1)　式(9)の左辺は，時点tでyを通る目標がtまで探知されず，時点tで$\phi_T^*(y,t)$だけ捜索して未探知のとき，更に単位努力量を追加投入するときの限界期待利得（式(9)の分子：｛（獲得価値＋t以後の捜索の節約リスク）－単位捜索コスト｝の期待値）と，単位捜索コスト（同分母）の比を表す．ゆえに［定理１］はt時点ではこの値が$\lambda(t)$に均衡するように捜索努力を配分し，$\lambda(t)$に達しない地点は捜索しないのが最適であることを示している．

(2)　式(10)の左辺は，時点Tまで未発見の条件下の時点Tの期待獲得価値を表し，右辺は時点Tで投入される総捜索コストを表す．ゆえに［定理２］は$T<T^0$ならば，期待獲得価値の方が時点Tの総捜索コストよりも大きいので捜索を継続すべきであり，逆に$T>T^0$では，期待獲得価値よりも総捜索コストの方が大きくなるので捜索を続けるべきではないことを示す．

(3)　離散時点・離散目標空間の問題についても同様の定理が得られる．式(6)が凹関数の場合は，定理は必要十分条件となる（Kuhn-Tucker の定理）．

(4)　目標物の経路が交叉せず，目標空間(Y,T)をパラメータ空間 X に変換するヤコビ行列の絶対値が，時間要素tとパラメータ空間要素xの積で表される場合は問題はx空間上の静止目標問題に変換されるので，拡散目標物については解析的に閉じた必要十分な最適解が導かれる[5,6]．

(5)　本研究の特殊なケースとして，上述の定理のパラメータを適当に設定すれば，発見確率最大化問題，期待捜索コスト最小化問題，静止目標問題等の従来の研究の最適解が導かれる．

5　数 値 例

（発表会当日，提示する．）

6　おわりに

本研究では，期待利得を評価尺度とし，寿命を考慮した場合の移動目標に対する最適捜索計画を分析した．ここでは条件付決定論的移動という限定された移動形態の問題を扱ったが，本研究で得られた結果は現実の救難捜索オペレーションの効率化に役立つものと考える．なお本研究では制約コストが任意に分割可能な連続問題を取り扱ったが，離散努力量制約が課せられる場合の整数計画問題に対しては，本研究の連続努力量問題を緩和問題とする分岐限定法の数値解アルゴリズムが構築できると考えられる．ただしこの問題の詳細は今後の研究課題である．

［参考文献］

[1] L.D.Stone: *Mathmatical Programing Study*,6(1976), pp.227-245.

[2] T.Nakai: *J.of Opns.Res.Soc.of Jpn.*, Vol.25(1982), pp.175-191.

[3] R.Hohzaki.and K.Iida: *J.of Opns.Res.Soc.of Jpn.*,37 (1994),pp.64-79.

[4] J.H.Discenza.and L.D.Stone: *Operations Resarch*, 29(1981),pp.309-323.

[5] L.D.Stone : *Theory of Optimal Search.* ch.8. Academic Press,(1975).

[6] K.Iida: *Nav.Res.Log.*,36(1989),pp.597-613.