1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

全節点・領域間がk-枝連結となる様に領域を決定する問題

01009550　NTT通信網研究所　伊藤大雄　ITO Hiro

1．はじめに　通信網の強度を評価するのに、交換機を節点に対応させてグラフにモデル化して連結度で評価するのが効果的である。しかしマルチメディアサービスを供給する通信網を考えると単純なグラフでは適切な評価ができない場合もある。そこでグラフ$G=(V,E)$（但しVは節点集合で、Eは枝集合）に節点部分集合属$X=\{V_i \mid V_i \subseteq V, i=1,2,\cdots,|X|\}$を組合せ、領域グラフ$(G,X)$を考える[1]。各$V_i$は領域と呼ばれる。そして領域グラフ上での節点と領域間の点（枝）連結度であるNA点（枝）連結度を考え、いくつかの性質を明らかにした[1]-[4]。本稿では、k-NA枝連結でない領域グラフを与え、各領域に属する節点を最小数増加させることでk-NA枝連結化する問題を考え、固定したkに対し$O(|E|+|V|^2+L')$時間、$k\leq 3$に対して$O(|E|+L')$時間のアルゴリズムを与える。但しL'は出力に必要なデータ量である。この問題はマルチメディア網において、同一のサービスを供給するノード（サービスノード）を複数設置し、利用者はどれか一つのサービスノードにアクセスすればそのサービスが受けられる様な場合において、k箇所未満の任意の通信リンクの故障に対してサービスを保証するように、サービスノードを増加する問題に適用できる。

2．問題の定義

【定義】$G=(V,E)$を無向多重グラフ、Vを節点集合、Eを枝集合とする。Vの部分集合族$X=\{V_i \mid V_i \subseteq V, i=1,2,\cdots,|X|\}$とグラフ$G$の組合わせを**領域グラフ**と呼び$(G,X)$で表す。各$V_i$を**領域**と呼ぶ。グラフ$G=(V,E)$の$x\in V$と$W\subseteq V-\{x\}$について、$\forall F\subseteq E$ $(|F|\leq k-1)$をGより除去したグラフ$G-F$において、xと$\exists y\in W$が連結である時、xとWは**k-NA枝連結**であると言う。領域グラフ(G,X)の$\forall x\in V$と$\forall V_i\in X$ $(x\in V-V_i)$について、xとV_iがk-NA枝連結である時、(G,X)はk-NA枝連結であると言う。２つの節点部分集合$W_1, W_2\subseteq V$に対し、その両端点をW_1とW_2に一つずつもつ枝の集合を$E(W_1, W_2)$であらわす。

【定義】領域最小拡大k-NA枝連結化問題（但し、kは定数）

入力：領域グラフ$(G=(V,E), X=\{V_i \mid i=1,2,\cdots,|X|\})$

出力：k-NA枝連結である領域グラフ$(G=(V,E), X'=\{V_i' \mid i=1,2,\cdots,|X|\}), V_i\subseteq V_i'$.

目的関数：$\Sigma_{i=1}^{|X|} |V_i'-V_i| \rightarrow$ minimize

3．解法　グラフの節点集合はk-枝連結性に関する同値類に分割できることが知られている。すなわち、Vの分割$C(k)_1, C(k)_2, \ldots, C(k)_{K(k)}$ $(\cup_{i=1}^{K(k)} C(k)_i=V, C(k)_i\cap C(k)_j=\phi$ for $i\neq j)$のうちで、「$x,y\in \exists C(k)_i \Leftrightarrow \lambda(x,y)\geq k$」を満たす様なものが存在する。$C(k)_i$に空集合を認めないとすると、kに関しこの分割は一意に定まり、その時の各$C(k)_i$を**k-枝連結成分**と呼ぶ。Gのk-枝連結成分を用いた領域グラフ(G,X)のk-NA枝連結性の必要十分条件が存在する[3]。

【定理１】[3]領域グラフ$(G=(V,E), X)$がk-NA枝連結である必要十分条件は、「全ての$h\in\{1,2,\cdots,k\}$に対し、全てのh-枝連結成分$C(h)_i$が

(1)全ての領域内の節点を少なくとも一つずつ含む。

(2)$|E(C(h)_i, V-C(h)_i)|\geq k$

のどちらかを満たすこと」である。

本定理を利用して領域最小拡大k-NA枝連結化問題の線形時間アルゴリズムを与える。まず必要な用語を定義しておく。

【定義】h-枝連結成分C（但し$h\leq k$）が定理１の条件(1)(2)を共に満たさないとき、Cを**不良成分**と呼ぶ。その真部分集合として不良成分を含まない様な不良成分を**極小不良成分**と呼ぶ。

【補題１】任意の二つの異なる極小不良成分をC_1^*, C_2^*とすると、$C_1^*\cap C_2^*=\phi$が成立する。

証明）$C_1^*\cap C_2^*\neq\phi$と仮定する。連結成分の定義から$C_1^*\supset C_2^*$または$C_1^*\subset C_2^*$でなければならないが、いずれの場合にもC_1^*またはC_2^*の極小性に反する。Q. E. D.

【補題2】領域グラフ(G,X)の極小不良成分を$C_1^*, C_2^*, \cdots, C_p^*$とする。$\delta_j$を$V_i \cap C_j^* = \phi$なる領域$V_i \in X$の数とする。領域最小拡大k-NA枝連結化問題の解の目的関数値は少なくとも$\Sigma_{j=1}^{p} \delta_j$である。

証明）定理1と補題1より明らか。Q. E. D.

【補題3】領域グラフ(G,X)の極小不良成分を$C_1^*, C_2^*, \cdots, C_p^*$とする。節点部分集合族$X' = \{V_i' \mid i=1, 2, \cdots, |X|\}$, $V_i \subseteq V_i'$が、各$i=1, 2, \cdots, |X|$について、$V_i \cap C_j^* = \phi$なる任意のC_j^*に対し$|V_i' \cap C_j^*| = 1$を満たすとする。このとき(G,X')は領域最小拡大k-NA枝連結化問題の実行可能解である。

証明）定理1及び極小不良成分の定義から明らか。Q. E. D.

補題2、3より、補題3におけるX'が得られれば、(G,X')の目的関数値は$\Sigma_{j=1}^{p} \delta_j$となり最適解が得られたことになる。明らかにこのようなX'は常に存在し、しかも極小不良成分を列挙することができればX'は容易に求められる。以下に示す手続きはこれを実現するアルゴリズムである。

```
procedure AUGMENT(G,X)
begin
1   V_i':=V_i, i=1, 2, …, |X|とする。
2   ∀h∈{1, 2, …, k}に対し, h-枝連結成分{C(h)_1, C(h)_2, …, C(h)_K(h)}を作成する。
3   各h-枝連結成分C(h)_j, j=1, 2, …, k-1に含まれる(h+1)-枝
    連結成分を列挙できるリストを作製する。
4   各h-枝連結成分C(h)_j, j=1, 2, …, kに対し、
    cond1(C(h)_j):=0とする。
5   do h=k to 1 step -1
6     do for 全てのh-枝連結成分C(h)_j
7       C(h)_jに含まれる(h+1)-枝連結成分のうち一つでも
        cond1の値が1であるならばcond1(C(h)_j)=1とする。
8       if C(h)_jが条件(2)を満たしていない then
9         if cond1(C(h)_j)=0 then
10          if C(h)_jが条件(1)を満たしていない then
11            C(h)_j∩V_i'=φである全てのV_i'に対し、C(h)_j
              に含まれる任意の節点xを一つ選び、
              V_i':=V_i'∪{x}とする。
12            cond1(C(h)_j):=1
13          else
14            cond1(C(h)_j):=1
15          endif;
16        endif;
17      endif;
18    enddo;
19  enddo;
20  V_i', i=1, 2, …, |X|を出力して停止。
end;
```

h-枝連結成分$C(h)_j$に含まれる(h+1)-枝連結成分のうち一つでも条件(1)を満たせば、$C(h)_j$も条件(1)を満たすことを利用し、変数cond1を使って条件(1)の判定時間を節約している。本手続きが領域最小拡大k-NA枝連結化問題の最適解を与えることは以前の議論から保証される。次に計算時間を見積もる。文献[4]より、$O(|E|)$時間必要なアルゴリズムを前処理に適用することによって、それ以降は$|E|=O(k|V|)$とすることが出来る。また、第2行の実行時間は$O(|E|+|V|^2+|V| \min\{|E|, k|V|\} \min\{k, |V|\})$時間である[5]。第10行の条件(1)の判定は一度行えば、そのh-枝連結成分を含むh'-枝連結成分（h'>h）に対しては第7行の操作によりcond1の値が1となるので、第10行は実行されない。よって第10～15行の実行に必要な計算時間はアルゴリズム全体で$O(|V|+L')$時間（但し$L' := \Sigma_{i=1}^{|X|} |V_i'|$（$\leqq |V||X|$）で、出力に必要なデータ量）。よって第3～20行の実行は$O(k|V|+k \min\{|E|, k|V|\}+L')$時間。故に本アルゴリズムの計算時間は全体で$O(|E|+|V|^2+L'+\min\{|E|, k|V|\}\min\{k|V|, k+|V|^2\})$時間となり、固定したkに対し$O(|E|+|V|^2+L')$時間である。但し$k \leqq 3$に対してはk-枝連結成分が線形時間で作成できる[6]ことを利用すれば、$k \leqq 3$に対しては$O(|E|+L')$時間、すなわち線形時間となる。

謝辞　貴重な御意見を頂いた、京都大学工学部の茨木俊秀教授ならびに永持仁助教授、そして豊橋技術科学大学の増山繁助教授およびNTT通信網研究所の竹中豊文主幹研究員に感謝致します。

参考文献　[1] 伊藤大雄, "グラフにおける節点・領域連結度について," 電気学会論文誌C, Vol. 114-C, No.4, pp.463-469, 1994.　[2] Ito H., "Connectivity problem on area graphs for locally striking disasters —Direct NA-connection," IEICE Transactions, Vol. E78-A, No. 3, pp. 363-370, 1995.　[3] 伊藤大雄, "全節点・領域間のk-枝連結性の高速判定法," 信学技報, COMP94-84 (1995-01), pp. 75-83, 1995.　[4] 伊藤大雄, "通信網の簡素化問題 — 連結度、領域グラフ、T-混合カット," NTT R&D, Vol.44, No.4, pp. 367-372, 1995.　[5] Nagamochi H. and Watanabe T., "Computing k-Edge-Connected Components in Multigraphs," IEICE Transactions, Vol. E76-A, No. 4, pp. 513-517, 1993.　[6] Nagamochi H. and Ibaraki T., "A Linear Time Algorithm for Computing 3-Edge-Conneted Components in a Multigraph," Japan J. of Industrial and Applied Mathematics, Vol. 9, No. 2, pp. 163-180, 1992.