1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

最小 k 部分木問題に対する分枝限定法の適用

早稲田大学 *星崎 康広 HOSHIZAKI Yasuhiro
01107880 防衛大学校 片岡 靖詞 KATAOKA Seiji
02002990 早稲田大学 今泉 淳 IMAIZUMI Jun
01603200 早稲田大学 森戸 晋 MORITO Susumu

1 はじめに

連結グラフにおいて、定められたある点 r を根として枝がちょうど k 本あるような連結部分木を k-部分木と呼ぶ。各枝にコストが与えられているとき、枝のコストの総和が最小になる k-部分木を求める問題を最小 k-部分木問題 (Minimum k-Subtree Problem:以下 k-ST) と呼ぶ。この問題は最小木問題に似ているが、最小木問題が多項式オーダーの問題であるのに対して、k-ST は $\mathcal{NP}$困難性が証明されている [1] 問題である。k-ST はシュタイナー木問題や最小木問題のように、応用も豊富な極めて基本的な問題であるにもかかわらず、その解法に関する過去の研究は非常に少ない。片岡ら [1][2] が k-ST の上界値、下界値の計算方法を提案しているが、それに基づく最適解法や計算実験は報告されていない。

本研究では k-ST に対する分枝限定解法を構築し、計算実験に基づきその有効性を評価する。

2 定式化

グラフ $G=(V,E;c)$ を、点集合が V、枝集合が E、枝のコストが c の無向グラフとする。x_{ij} を枝 (i,j) が選択されるとき 1、それ以外のとき 0 となる変数とする。また点集合 S の補集合を $\bar{S}$ で表すと k-ST は次のように定式化される [1]。

$$
\begin{array}{lll}
\text{Minimize} & \displaystyle\sum_{i\in V}\sum_{j\in V} c_{ij}x_{ij} & \\
\text{subject to} & & \\
& \displaystyle\sum_{i\in V}\sum_{j\in V} x_{ij} = k & \\
& \displaystyle\sum_{i\in S}\sum_{j\in \bar{S}} x_{ij} \geq 1 & \forall S\subset V, \\
& & |S|\leq k, r\in S \\
& x_{ij} = 0 \text{ or } 1 &
\end{array}
$$

3 下界値計算 (GLB)

GLB (Greedy procedure to obtain Lower Bounds) は片岡ら [1] が提案した k-ST に対する下界値計算アルゴリズムである。このアルゴリズムでは枝の歩数という概念が利用されている。

3.1 枝の歩数

グラフ $G=(V、E)$ において、根節点 r から点 q までの、枝の本数が最小な経路を $r,...,p,q$ (p は経路 r-q における q の直前の点) とするとき、経路 r-q 上の枝の本数を枝 (p,q) の歩数とする (図 1 参照)。

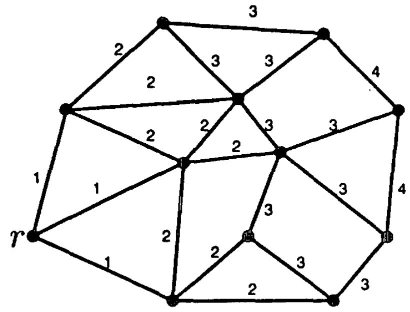

図 1 枝の歩数

3.2 アルゴリズム GLB

根節点 r から歩数 i の枝集合を E_i、枝 e のコストを $c(e)$、枝 e の歩数を $d(e)$ とする。

・アルゴリズム GLB

$F=\emptyset; i=1; L=0;$
while$(i\leq k)\{$
  $c(e_i)=\min\{c(e)|e\in\bigcup_{j=1}^{i}E_j\};$
  if$(F\cup\{e_i\}$ has no cycle$)\{$
    $F=F\cup\{e_i\};$
    $L=L+c(e_i);$
    $i=i+1;$
  $\}$
  $E_{d(e_i)}=E_{d(e_i)}\setminus\{e_i\};$
$\}$

4 上界値計算 (HUB)

k-ST の上界値は、最小木問題の解法アルゴリズムの 1 つである Prim のアルゴリズムを、k 回の反復後に止めることにより得ることができる。この上界値をさらに改善するためには、点の交換を行ない、新しい点集合において最小木を構成するような方法が必要となる。片岡ら [1] は、次に示す HUB (Heuristic procedure to obtain Upper Bounds) という 2 種類の点交換方法からなる手法を提案している。

現在の実行可能解の点集合を P、枝集合を Tとする。

方法 1 カット $(P, V \setminus P)$ から最小コストの枝 e を取り込み、木 $T \cup \{e\}$ から最大コストの葉を取り除く。

方法 2 カット $(P, V \setminus P)$ から最小コストの枝 e を取り込み、木 $T \cup \{e\}$ から次数 2 の関節点に接続する 2 本の枝を取り除き、生成される 2 連結成分で構成されるカットの中からコスト最小の枝を取り入れる。

これらの方法の後、生成された木は新しい点集合の最小木になっている。以上の 2 つの方法のうち、改善の大きい方を選び、どちらかの改善ができる限りこのプロセスを続ける。

5 分枝限定法

本研究では、片岡ら [1] の GLB を分枝限定法の枠組の中で繰り返し使用可能なように修正し、HUB による上界値とあわせて分枝限定法のアルゴリズムを作成する。

5.1 分枝変数の選択

分枝変数は子問題の下界値ができるだけ上昇するように選択するのが望ましいとされる。本研究では、親問題に GLB を適用したときに、最初に選ばれる枝に対応する変数を分枝変数とする。

5.2 分枝頂点の選択

分枝頂点の選択順序は、予備実験において 6 種類の選択基準を比較した結果から、GLB で生成された部分木の数が少ないものから分枝するとする。

5.3 枝に条件がついた GLB

分枝限定法の子問題は、いくつかの枝の選択の採否がすでに決まっている問題である。よって、GLB の適用には次のことに注意が必要である。

子問題において選択しなければならない枝は、すべて根節点から連結している。また選択しなければならない点の中には根節点も含まれている。これらを利用し、以下の処理を問題に施す。

- 選択しなければならない枝と点を 1 つの根節点とする。
- 選択しなければならない点から、1 つの点に対して複数の枝が出ているときは、この中で最もコストが小さいものを残す。
- 選択してはならない枝はコストを M (十分大きな値) とする。

5.4 分枝の停止

分枝限定法の子問題は、(1) 解が実行可能 (木) となる、もしくは (2) 下界値が上界値以上になると分枝を停止できるが、本研究においては、問題の性質により、(3) 選択してはならない枝の両端の点が、選択しなければならない点となる場合も分枝を停止できる。

6 実験結果と考察

6.1 実験結果

本研究に特有の 5.4 節の 3 番目の終了条件の効果をみるため次に示す 2 種の実験を行なった。

実験 1 5.4 節の 1 番目と 2 番目の条件のみ考慮する。

実験 2 5.4 節の 1、2、3 全ての条件を考慮する。

表中の分枝頂点数とは、生成された分枝頂点の延べ数である。時間は CPU-時間 (単位 秒) である。なお、頂点数が 500000 のものは、その時点で計算を打ち切ったものである。同じ条件の問題を 3 題ずつ行ない、計算機は SPARC station 20 を使用している。

表 1 終了条件の効果

$\lvert V\rvert$	$\lvert E\rvert$	k	分枝頂点数		時間 (秒)	
			実験 1	実験 2	実験 1	実験 2
20	47	10	390	198	0.10	0.05
20	47	10	60	56	0.00	0.00
20	47	10	752	426	0.17	0.10
30	108	15	4026	550	2.48	0.35
30	108	15	62160	5042	35.28	3.08
30	108	15	24398	2696	12.38	1.27
40	195	20	84692	5802	132.9	7.8
40	195	20	500000	96662	743.8	111.7
40	195	20	500000	101948	691.0	141.5
50	306	25	500000	34772	1070.0	70.0
50	306	25	500000	132496	1441.9	301.0
50	306	25	500000	79800	1087.8	141.7

6.2 考察

分枝頂点を 1 つ生成するのにかかる時間については、実験 1 と実験 2 の間に大きな差はみられないが、実験 2 の方が生成分枝頂点数が少ないため、良い結果となっている。また実験 1 において計算を打ち切られた 5 題の問題のうち 3 題は最適解に達しておらず、このことも考慮すると 5.4 節の 3 番目の終了条件は問題の規模の増加に伴い、より有効になってくるといえる。この理由としては、問題の規模の増加とともに多くの枝に条件がついた子問題が生成される可能性が高くなり、この終了条件を満たす子問題が多くなる、ということが考えられる。

7 今後の課題

表 1 を見ると、同じ条件の問題でもかなり結果に差がでていることがわかる。よって、問題の構造が結果にどの様な影響をもたらすかを調べる必要がある。

参考文献

[1] 片岡、山田、高橋 OR 学会アブストラクト 1995 春 242-243.

[2] 片岡、山田、高橋 OR 学会アブストラクト 1994 秋 230-231.