

0-1 ナップザック問題の重み点に対応する解の個数に関する一つの恒等式

(発表者) 01504364 近畿大学・商経学部 林 芳男 HAYASHI Yoshio

(本文)  $n$  を任意に与えられた正の整数とする。 $n$  変数の 0-1 ナップザック問題の制約式を作る正の実数の重み係数  $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  から次のように重み点  $\{W_0 (= 0), W_1, W_2, \dots, W_J\}$  を小さいものから大きいものへと順に

$$W_0 \triangleq 0$$

$$W_1 \triangleq \text{Min} \{w \cdot x : W_0 < w \cdot x, x_j = 0 \text{ 又は } 1 (j = 1, 2, \dots, n)\}$$

⋮

$$W_r \triangleq \text{Min} \{w \cdot x : W_{r-1} < w \cdot x, x_j = 0 \text{ 又は } 1 (j = 1, 2, \dots, n)\}$$

⋮

$$W_J = w_1 + w_2 + \dots + w_n$$

で定義した。ここに、 $w \triangleq (w_1, w_2, \dots, w_n)$  は重み係数のベクトル、 $x \triangleq$

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$  は変数のベクトル、そして  $w \cdot x \triangleq \sum_{j=1}^n w_j x_j$  である。

$J$  はその 0 でない重み係数の数でその 0-1 ナップザック問題の  $J$  数と呼ばれるものである。各重み点  $W_r (r = 0, 1, 2, \dots, J)$  に対応する解の総数を  $s_r$  で表す。つまり、

$$s_r \triangleq |\{x : w \cdot x = W_r, x_j = 0 \text{ 又は } 1 (j = 1, 2, \dots, n)\}| \quad (1)$$

とおく。

$$s_0 = s_J = 1 \quad (2)$$

は明らかである。また、

$$W_1 = w_{\min}$$

で (3)

$$s_1 = |\{j : w_j = w_{\min}\}|$$

である。ここに、 $w_{\min} \triangleq \text{Min} \{w_j (j = 1, 2, \dots, n)\}$  である。

すべての解の総数は  $2^n$  であるから

$$\sum_{r=0}^J s_r = 2^n \quad (4)$$

が成り立つ。(1) の命題 3.2 で

$$W_r + W_{J-r} = W_J \quad (r = 0, 1, \dots, J) \quad (5)$$

であることを示した。その証明の過程から

$$s_r = s_{J-r} \quad (r = 0, 1, 2, \dots, J) \quad (6)$$

であることも分かる。よって、(4)より

$$\begin{aligned} & J \text{ が奇数のとき} \quad \sum_{r=0}^{(J/2)} s_r = 2^{n-1}; \\ & J \text{ が偶数のとき} \quad \sum_{r=0}^{((J-1)/2)} s_r + s_{J/2}/2 = 2^{n-1} \end{aligned} \quad (7)$$

が成り立つ。さて、次の恒等式が一般的に成り立つ。

命題  $z$  を任意の正の値を取る変数とする。このとき  $s_r, W_r$  ( $r = 0, 1, 2, \dots, J$ ) と  $z$  に関して次の式が成り立つ。

$$\sum_{r=0}^J s_r z^{W_r} = \prod_{j=1}^n (1 + z^{W_j}) \quad (8)$$

( $z$  の次数は整数とは限らないことに注意しよう)

(4)は(8)で  $z = 1$  とおいたものであることに注意しよう。この命題の証明、恒等式(8)から導けるその他の公式、整数計画法の他の分野で(正の整数を係数とする一つの線形不定方程式、これもまたナップザック問題と呼ばれているものの制約式である、の解の個数に関して)知られている([2, 3]を参照)この式と類似に成立する同様な恒等式とそこから導けることとの関連を論じたい。

#### 参考文献

- [1] 林 芳男「0-1 ナップザック問題の重み集合とその性質」近畿大学商経学会・商経学叢第42巻第1号、1995年7月、139-151頁
- [2] Faaland, B (1972), "On the Number of Solutions to a Diophantine Equation," J. of Combinatorial Theory (A), 13, 173-175.
- [3] Hayashi, Y. (1983), Fundamentals of Integer Linear Programming, Ph.D thesis, Graduate School of Management, University of Rochester.