

最小滞在時間問題(2) — 分枝限定法の適用と3教員緩和 —

早稲田大学 *徳永 康二 TOKUNAGA Koji
01107880 防衛大学校 片岡 靖詞 KATAOKA Seiji
02002990 早稲田大学 今泉 淳 IMAIZUMI Jun
01603200 早稲田大学 森戸 晋 MORITO Susumu

1 問題の定義および研究目的

学生 n 人, 教員 m 人がおり, 各学生には複数の卒論指導教員がいる. 卒論発表会では, 各教員は, 最初の担当学生の発表開始から最後の担当学生の発表終了まで滞在しなければならない. このとき, 学生の発表順番をスケジュールし, 教員の滞在時間の総和を最小化する問題を最小滞在時間問題 (Minimum Stay Problem: MSP) と呼ぶことにする.

MSP は次のように 0-1 混合整数計画問題として定式化できる. ここに行列 $[a_{jk}]$ は, 学生 j が教員 k の指導を受ける (受けない) とき 1(0) である. 変数 x_{ij} は, 学生 j が時限 i に発表する (しない) とき 1(0) となる 0-1 変数. さらに, y_{ik} : 教員 k の担当開始以降 1, z_{ik} : 教員 k の担当終了以前 1, となる 2 種類の実数変数を導入する.

$$\text{目的関数 } \min \sum_{k=1}^m \left[\sum_{i=1}^n (y_{ik} + z_{ik}) - n \right] \quad (1)$$

制約条件式

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad \forall j \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad \forall i \quad (3)$$

$$y_{ik} \geq y_{(i-1)k}, \quad \forall k, i = 2, 3, \dots, n \quad (4)$$

$$y_{ik} \geq \sum_{j=1}^n a_{jk} x_{ij}, \quad \forall k, i \quad (5)$$

$$z_{ik} \geq z_{(i+1)k}, \quad \forall k, i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (6)$$

$$z_{ik} \geq \sum_{j=1}^n a_{jk} x_{ij}, \quad \forall k, i \quad (7)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad 0 \leq y_{ik}, z_{ik}, \quad \forall i, j, k \quad (8)$$

本研究では, この定式化をもとに線形緩和による下界値について検討した後, 分枝限定法の適用を試みる. さらに, MSP のように線形緩和だけでは有効な下界値が得られないような問題においては, 問題の構造を利用した新たな緩和法を提案し, より簡単により有効な下界値が得られることを示す.

2 線形緩和による下界値

10 学生 4 教員の例題を用いて定式化 (MSP) の線形緩和による下界値を算出した結果, 目的関数値が負の値になる場合もある. そこで線形緩和を利用して下界値上昇のために MSP に新たな制約式を加えることを考える. ここに, $L_k (= \sum_{j=1}^n a_{jk})$ を教員 k の担当学生数とする.

type1 各教員の滞在時間に非負条件を加える

$$\sum_{i=1}^n (y_{ik} + z_{ik}) - n \geq 0, \quad \forall k \quad (9)$$

type2 各教員の各時限での滞在を表す変数に非負条件を加える

$$y_{ik} + z_{ik} \geq 1, \quad \forall i, k \quad (10)$$

type3 各教員は, 担当学生数以上滞在しなければならない制約を加える

$$\sum_{i=1}^n (y_{ik} + z_{ik}) - n \geq L_k, \quad \forall k \quad (11)$$

これらの制約式を加えて, 下界値が上昇する様子を表 1 に示す.

表 1: 制約式付加による下界値

定式化	MSP	type1	type2	type3	最適値
問題 1	-4	0	0	18	23
問題 2	0	2	2	20	26
問題 3	6	6	6	23	28

制約式付加による下界値は, type3 の制約付加により, 大きな改善を得ることができるとは, まだ大きな差を残す結果となる.

3 分枝限定法

3.1 分枝限定法の計算戦略

本研究では, 以下の戦略に基づき, 分枝限定法アルゴリズムを構築する.

探索方法：深さ P 探索 [3] を行う。この探索方法により深さ優先探索と発見的探索を行うことができる

分枝頂点の選択：擬コストによる目的関数の推定値を用いて分枝頂点の選択 [2] を行う

分枝変数の決定：推定値を用いて下界値の劣化が大きい部分問題を生成するよう分枝変数を決定する

3.2 分枝限定法による計算実験

第3節の学生10人、教員4人の問題1を用いて、分枝限定法の探索時間の比較を行う。探索時間の比較対象は、深さ P 探索におけるパラメータ P の中で最短時間で解けたものとする。計算機は、SPARC station 20 を使用する。

表 2: 分枝限定法実行結果

定式化	制約式の数	変数の数	整数変数の数	探索のCPU(秒)	P
MSP	172	180	100	12868	100
type1	176	180	100	15346	100
type2	212	180	100	19003	75
type3	176	180	100	16309	50

本問題において線形緩和を用いた分枝限定法では、下界値改善のための制約式を付加すると、かえって探索時間が増加する結果となった。さらに、小規模問題にもかかわらず多大な計算時間を要することがわかった。

4 問題の構造を利用した下界値

4.1 3 教員滞在時間最小化の解法

教員数が3人の場合、滞在時間最小化問題は、全列挙や分枝限定法を行うことなく次の方法で容易に求めることができる。

3 教員の担当可否を表すパターンとの組合せは 2^3 通りある。学生数が大きくなると、同じパターンのものが重複することになるが、1箇所まとめて連続するようスケジュールすることができる。このことより3教員の場合、8! 通りのスケジュールの最小化を考えればよい。

この8! 通りの滞在時間の最小値は、9 通りの優先順序順に並べ換えた中の滞在時間最小値の算出により求めることができる。さらに、3 教員の並べ方の組合せ $3!$ 通りを考慮する必要があり、計 $9 \times 3!$ 通りのスケジュールの中の最小値の算出により求めることができる。

4.2 下界値の算出法

教員 m 人を3人ずつのブロックに分け、各ブロックごとに滞在時間最小化を行い、その総和を下界値とする。ブロックへの分け方は、教員数に依存するが、厳

密に全ブロック分割を調べる必要はなく、いくつかのブロック分けを考え、各ブロック分けにおいて得られる下界値の最大のものをとればよい。

		教			員		
		1 2 3	4 5 6	m
学	1	1 0 0	1 0 0				1 0
	2	1 1 0	1 1 0				1 1
	3	1 0 1	1 0 1				1 0
	⋮	⋮	⋮				⋮
	$n-1$	1 1 1	1 1 1				1 1
生	n	0 1 0	0 1 0				0 1

図 1: 3 教員緩和によるスケジュール図

4.3 3 教員緩和による下界値

$t_1 \sim t_3$ は、第3節の type1~type3 を表す。MSP 並びに、type1~type3 は線形緩和による下界値。

表 3: 下界値の比較

定式化	MSP	t_1	t_2	t_3	3 教員緩和	最適値
問題1	-4	0	0	18	20	23
問題2	0	2	2	20	22	26
問題3	6	6	6	23	25	28

5 考察

滞在時間最小化問題に対する線形緩和による下界値は、最適値よりかなり小さい値となった。この対策として、制約式の付加を行った結果、下界値は上昇したが、滞在時間が各教員の担当人数の和以上になる下界値を得ることは、困難だった。

線形緩和による分枝限定法を用いると、小規模問題にもかかわらず、最適値を得るのに多大な時間を要する結果となった。このことより滞在時間最小化問題の解を求めるのに線形緩和による分枝限定法は、効率的でない。

3 教員による滞在時間最小スケジュールを解くことにより得られる下界値では、線形緩和よりよい下界値を得ることができる。さらに、この方法による下界値は、線形緩和より圧倒的に簡単に得ることができる。

今後の課題は、3 教員緩和による下界値をもとにした、分枝限定法アルゴリズムの開発である。

参考文献

- [1] 茨木俊秀, “組合せ最適化—分枝限定法を中心として”, 産業図書, 1983.
- [2] 茨木俊秀, 福島雅夫, “最適化プログラミング”, 岩波書店, 1991.