下方リスクモデルに対する数値実験による考察

— MLPMモデルとMOLDモデルの比較 —

01505910 慶應義塾大学 枇々木 規雄 HIBIKI Norio

1 はじめに

ポートフォリオ選択問題において目標収益率に対する不足分をリスクと考える下方リスクモデルとして、Bawa et.al は平均・下方部分積率モデル(MLPM モデル)を提唱している。MLPMモデルでは、収益率に離散データを用いると、(1)式に表すk次の下方部分積率$LPM_k(r_G)$をリスクとして定義する。ここで、kはリスクに対するペナルティ次数、r_Gはポートフォリオ収益率の最低目標水準(ターゲット)、$t(=1,\ldots,T)$は離散データを表す時点または状態(Tはその数)、r_tはtにおけるポートフォリオの収益率を表す。

$$LPM_k(r_G)=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\Big\{\max(r_G-r_t,0)\Big\}^k \qquad (1)$$

MLPMモデルは、投資家が要求する期待収益率のもとでリスクとして定義した$LPM_k(r_G)$を最小化するk次の非線形計画モデルである。それに対し、枇々木[1]は、MLPMモデルを代替する線形計画モデルとして、平均・オープンL偏差モデル(MOLDモデル)を提案している。MOLDモデルでは、λをリスクに対するペナルティ係数として、(2)式の$OLD_\lambda(r_G)$をリスク指標として定義している[1]。

$$OLD_\lambda(r_G)=(1-\lambda)\cdot\left\{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\max(r_G-r_t,0)\right\}+\lambda\cdot\max_t\{\max(r_G-r_t,0)\ ;\ t=1,\ldots,T\} \qquad (2)$$

MOLDモデルの係数λはMLPMモデルの次数kと(3)式のモデル式によって関係づけられている。

$$\lambda(k,T)=\frac{1}{T-1}\cdot\left(\frac{T}{\sqrt[k]{T}}-1\right) \qquad (3)$$

さらに、数値実験として、MOLDモデルに対する日経225個別銘柄による分析および8銘柄によるMLPMモデルとの比較を行い、MOLDモデルの特徴やMLPMモデルに対する代替性の検討している。しかし、MLPMモデルとの比較は小規模な問題でしか行われていないため、不十分な側面もあった。そこで、本研究では東京証券取引所全上場銘柄を用いた分析により、これらについてさらに詳しく検討を加える。

[1]MOLDモデルのリスク指標$OLD_\lambda(r_G)$は$\lambda=0$ならば、MLPMモデルの$k=1$の場合に、$\lambda=1$ならば、MLPMモデルの$k=\infty$の場合に相当するように、1次と無限次をそれぞれ$(1-\lambda)$, λで組み合わせた場合に相当する値として求められる。

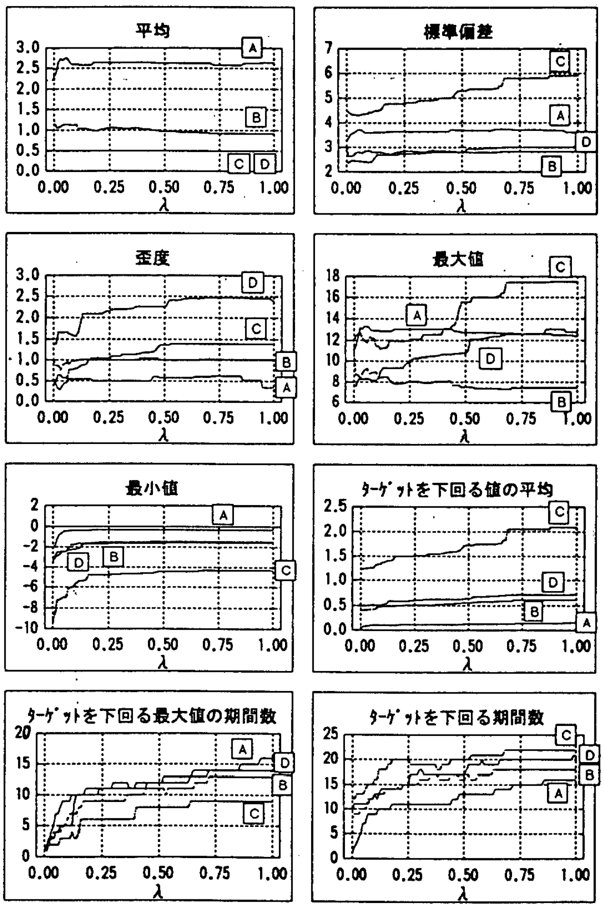
2 ヒストリカルデータを用いた分析

データは、東京証券取引所全上場銘柄の月次収益率を用いる。期間は36カ月として、1988年1月から1993年12月の間の4期間について、ターゲット(r_G) 3種類(0.0%, 0.2%, 0.4%)、要求期待収益率(r_E) 2種類(0.0%, 0.5%)、投資比率の組み入れ上限制約2種類(なし, 5%)の計12種類を分析した[2]。

2.1 MOLDモデルの分析

λを0から1まで0.01刻みで行った結果を$r_E=0.5\%$, $r_G=0.0\%$, 上限制約なしの場合のみ示す。

(1) 係数λと収益率の各指標値の関係[3]

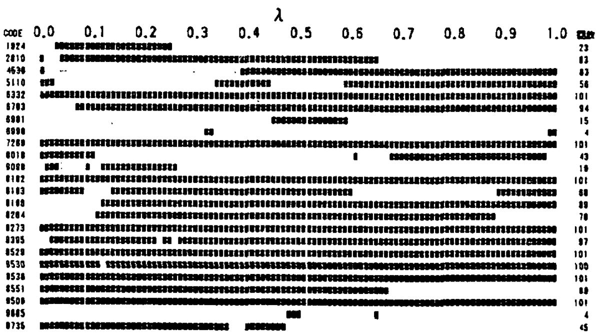


[2]1980年から1987年まではこれらのターゲットの設定値では下方リスクが0であったため、ここでは1987年以降の4期間のみ分析した結果を示している。また、詳しい分析結果は当日示す。

[3]1988年～1990年を期間A, 1989年～1991年を期間B, 1990年～1992年を期間C, 1991年～1993年を期間Dと呼ぶことにする。

特徴をまとめると、λ の値が大きくなるにつれて、
◇収益率の最小値が大きくなる。
◇ターゲットを下回る値の平均値が大きくなる。
◇収益率がその最小値と同じになる期間数が増える傾向がある。
◇収益率のターゲットを下回る期間数が増える(下回る確率が高くなる)傾向がある。

(2) 係数 λ と投資銘柄の関係(期間D)

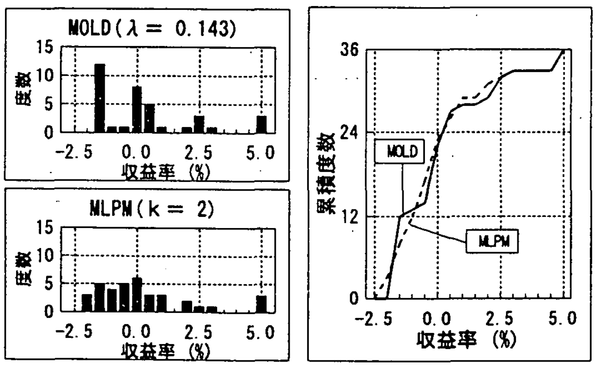


※ 投資比率が正の場合に黒点を打つ。

2.2 MOLDモデルとMLPMモデルの比較

MLPMモデルの次数 $k=2$〜5と、それに対応して(3)式により計算される λ_k について分析を行う。モデル化した係数 λ と次数 k の関係式も含めて、MOLDモデルの代替性について検討する。

(1) 収益率分布の比較



(期間D: $r_E = 0.5\%$, $r_G = 0.0\%$, 上限制約なしの場合)

MOLDモデルはMLPMモデルに比べ、収益率の最小値と同じになる期間数が大きくなるので、度数分布にはかなり違いが見られるが、累積度数分布を見れば、両モデルが似ていることが分かる。特徴をまとめるとMOLDモデルはMLPMモデルに比べて、
◇ターゲットを下回る最大値が小さい。
◇ターゲットを下回る期間数が少ない。
◇ターゲットを下回る大きさの平均が小さくなる傾向がある。

(2) 投資銘柄の比較

表1：共通投資銘柄比率(12種類平均)

	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	平均
期間A	88.05%	91.76%	91.70%	91.94%	90.86%
期間B	80.06%	81.20%	84.16%	87.08%	83.12%
期間C	81.57%	82.27%	84.98%	84.77%	83.40%
期間D	81.57%	82.27%	84.98%	84.77%	83.40%
平均	82.81%	84.38%	86.45%	87.14%	85.20%

(3) MOLDモデルの代替性の評価

$\sqrt[k]{LPM_k}$: MLPMモデルによる LPM の k 乗根
$\sqrt[k]{LPM(k,\lambda_k)}$: (3)式の λ_k を用いたMOLDモデルによる LPM の k 乗根
$\min_\lambda\left[\sqrt[k]{LPM(k,\lambda)}\right]$: MOLDモデルにより、101通りの λ を用いて問題を解いたときに求められる $\sqrt[k]{LPM(k,\lambda)}$ の最小値

代替性を(4)〜(7)式によって評価する。

$$DV_k = \frac{\sqrt[k]{LPM(k,\lambda_k)} - \sqrt[k]{LPM_k}}{\sqrt[k]{LPM_k}} \tag{4}$$

$$= DV_k^{(1)} + DV_k^{(2)} \tag{5}$$

$$DV_k^{(1)} = 1 - \frac{\min_\lambda\left[\sqrt[k]{LPM(k,\lambda)}\right]}{\sqrt[k]{LPM_k}} \tag{6}$$

$$DV_k^{(2)} = \frac{\min_\lambda\left[\sqrt[k]{LPM(k,\lambda)}\right] - \sqrt[k]{LPM(k,\lambda_k)}}{\sqrt[k]{LPM_k}} \tag{7}$$

$DV_k^{(1)}$ は線形モデルで近似することによる差、$DV_k^{(2)}$ は(3)式を用いた λ の設定方法による差を表す。

表2：評価値(全平均)

	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	平均
$DV_k^{(1)}$	5.467%	4.417%	3.786%	3.222%	4.223%
$DV_k^{(2)}$	1.357%	1.012%	0.944%	0.726%	1.010%
DV_k	6.824%	5.429%	4.730%	3.948%	5.233%

3 おわりに

本研究では、下方リスクモデルに対し、東証一部全銘柄のヒストリカルデータを用いた分析を行った。日経225銘柄に対する分析に加え、MOLDモデルの持つ特徴やMOLDモデルのMLPMモデルに対する代替性についてさらに検討を行うことができた。

【謝辞】
本研究を行うのに際し、御協力いただきました(株)数理システムの山下浩氏に感謝の意を表します。

参考文献

[1] 枇々木規雄：下方リスクを考慮したポートフォリオ最適化モデル,「ファイナンスのOR」研究部会(1995年9月30日), 配布資料.