

多項モデルによる経路依存型オプションの価格の上・下界評価

東北大学 経済学部 大西 匡光 (Masamitsu OHNISHI)

1 はじめに

本報告で扱う経路依存型オプションとは、原資産を、オプションの満期において、その発行時からの原資産の価格変動の経路に依存した行使価格で買う（コール）、あるいは売る（プット）権利のことである。本報告では原資産の価格変動が多項過程に従うものと仮定して、経路依存型オプションの上・下界の評価を行う。

2 モデルと仮定

本報告ではオプションの発行時から満期時までを T ($= 1, 2, \dots$) 期間に分割した離散時間モデルを考える。原資産の価格変動過程としては、第 t 期 ($= 0, 1, \dots$) のときの価格を s_t としたとき、次期、第 $t+1$ 期には確率 q_j (> 0) で $s_{t+1} = s_t u_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) となる、いわゆる、多項過程を仮定する。一般性を失うことなく、

$$u_1 < u_2 < \dots < u_n \quad (2.1)$$

と仮定する。

本報告では、紙面の都合上、コールオプションの価格の評価のみを行うことにする

仮定 2.1

- A1 市場に裁定機会は存在しない。
- A2 オプションの発行時から満期時までの間に原資産の配当はなく、その売買の取引に手数料あるいは税金はかからない。
- A3 無危険資産が存在し、その利子率は既知で、オプションの発行時から満期時まで一定である（便宜上

$$R := 1 + [\text{無危険資産の利子率}]$$

と定義する)。 □

仮定 A1 より、原資産の収益率と無危険資産の利子率の間には

$$u_1 < R < u_n \quad (2.2)$$

なる関係式が成立しなければならない。

本報告で扱う経路依存型オプションとは、原資産を、オプションの満期時 T ($= 1, 2, \dots$) において、その発行時からの原資産の価格変動の経路（履歴）

$$h_T = (s_0, s_1, \dots, s_T) = (h_{T-1}, s_{T-1} v_T) \quad (2.3)$$

に依存した行使価格 $G(h_T)$ で買う権利のことである。

この種のオプションの代表的なものとしては：

例 2.1 (経路依存型オプション)

ロシア・オプション (ルックバック・オプション)：

$$G^R(h_T) = \min_{t=0,1,\dots,T} s_t, \quad (2.4)$$

アジア・オプション (平均オプション)：

算術平均オプション：

$$G^{AA}(h_T) = \frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^T s_t, \quad (2.5)$$

幾何平均オプション：

$$G^{GA}(h_T) = \left\{ \prod_{t=0}^T s_t \right\}^{\frac{1}{T+1}} \quad (2.6)$$

□

いま

$C(h_t, t)$ ：満期時を T ($= 1, 2, \dots$) とし、第 t 期 ($= 0, 1, \dots, T$) において、原資産の価格変動の経路を h_t としたときのオプションの価格

と定義する。

$t = T$ 、すなわちオプションの満期時には次式が成り立つ：

$$C(h_T, T) = [s_T - G(h_T)]_+, \quad (2.7)$$

ただし、実数 a に対し、 $[a]_+ = \max\{0, a\}$ と定義する。

仮定 2.2

A4 $v_T = s_T / s_{T-1}$ としたとき、

$$\frac{G(h_T)}{s_{T-1}} \left(= \frac{G(h_{T-1}, s_{T-1} v_T)}{s_{T-1}} \right) \quad (2.8)$$

は v_T に関して単調非減少かつ凹である。 □

例 2.1 で挙げたオプションはいずれも仮定 A4 を満たしている。

3 市場の投資家の危険回避性を考慮しない場合

3.1 1 期間問題

満期時 T まで 1 期間, すなわち $t = T - 1$ の場合を考える. 価格 s_{T-1} の原資産が次期 (オプションの満期時) に価格 $s_{T-1}u_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) になることを “状態 j が起こる” と言い, 状態 j が起こったとき, そしてそのときに限り, 1 単位の配当を受ける Arrow-Debreu 証券の現在の価格 (状態価格) を e_j とする. もし各状態 j ($= 1, 2, \dots, n$) に対する Arrow-Debreu 証券をすべて 1 単位ずつ所有していれば, 次期にはどのような状態が起こっても確実に 1 単位の配当を受け取ることができる. 従って, 仮定 A1, A3 より, 次の関係式が成り立つ:

$$\sum_{j=1}^n e_j = R^{-1} \left(\sum_{j=1}^n R e_j = 1 \right). \quad (3.1)$$

また 原資産の価格に関しては, やはり仮定 A1 より,

$$s_{T-1} = \sum_{j=1}^n (s_{T-1}u_j)e_j \quad \left(s_{T-1} = R^{-1} \sum_{j=1}^n (s_{T-1}u_j)(R e_j) \right) \quad (3.2)$$

あるいは, 両辺の s_{T-1} を消去して,

$$\sum_{j=1}^n u_j e_j = 1. \quad (3.3)$$

が成立する ($R e_j$, $j = 1, 2, \dots, n$ はリスク中立確率とも解釈される). 同様にコールオプションの価格 $C(h_{T-1}, T-1)$ に関しても次式が成立する:

$$C(h_{T-1}, T-1) = \sum_{j=1}^n C((h_{T-1}, s_{T-1}u_j), T) e_j. \quad (3.4)$$

e_j , $j = 1, 2, \dots, n$ のすべての値が定めれば, 上式 (3.4) より $C(h_{T-1}, T-1)$ の値は定まるが, 情報としては, 無危険資産の利率 $R - 1$ および原資産の価格変動の履歴 h_{T-1} のみが与えられているものとする.

従ってオプションの価格の上・下界は, e_j , $j = 1, 2, \dots, n$ を決定変数とし, 式 (3.1), (3.3) を同一の制約条件, 式 (3.4) を共通の目的関数とする, 以下のような 2 つの線形計画問題の最適値として得ることができる.

$$\text{LP} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{maximize} \\ \text{or} \\ \text{minimize} \end{array} \right\} \sum_{j=1}^n C((h_{T-1}, s_{T-1}u_j), T) e_j$$

subject to

$$\sum_{j=1}^n u_j e_j = 1, \quad (3.6)$$

$$\sum_{j=1}^n e_j = R^{-1}, \quad (3.7)$$

$$e_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.8)$$

定理 3.1 オプションの満期時を T とする. 満期時まで 1 期間とする第 $T - 1$ 期において, 現資産の価格変動の経路を h_{T-1} とするとき, コールオプションの価格 $C(h_{T-1}, T-1)$ に対する線形計画問題 LP の最適値によって定まる上・下界をそれぞれ $\bar{C}(h_{T-1}, T-1)$, $\underline{C}(h_{T-1}, T-1)$ と表すと,

$$\begin{aligned} \bar{C}(h_{T-1}, T-1) &= R^{-1} \{ \alpha C((h_{T-1}, s_{T-1}u_1), T) \\ &\quad + (1 - \alpha) C((h_{T-1}, s_{T-1}u_n), T) \} \\ \underline{C}(h_{T-1}, T-1) &= R^{-1} \{ \beta C((h_{T-1}, s_{T-1}u_h), T) \\ &\quad + (1 - \beta) C((h_{T-1}, s_{T-1}u_{h+1}), T) \} \end{aligned}$$

が成立する, ただし

$$\alpha := \frac{u_n - R}{u_n - u_1}$$

とし, $u_h \leq R < u_{h+1}$ である $h \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ を用いて

$$\beta := \frac{u_{h+1} - R}{u_{h+1} - u_h}$$

□

3.2 多期間問題

1 期間問題と同様の考え方を繰り返し適用すれば良い.

4 市場の投資家の危険回避性を考慮する場合

紙面の都合上省略する.

参考文献

- [1] Rubinstein, M. (1976), *The Bell Journal of Economics*, Vol. 7, pp. 407-425.
- [2] Cox, J. C., Ross, S. A. and Rubinstein, M. (1979), *Journal of Financial Economics*, Vol. 7, 1093-1110.
- [3] Perrakis, S. and Ryan, P. (1984), *Journal of Finance*, Vol. 39, 519-525.
- [4] Ritchken, P. H. (1985), *Journal of Finance*, Vol. 40, pp. 1219-1233.
- [5] Ritchken, P. H. and Kuo, S. (1988), *Journal of Finance*, Vol. 43, pp. 301-308.
- [6] Ritchken, P. H. and Kuo, S. (1989), *Management Science*, Vol. 35, pp. 51-59.