1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

線形制約のもとでの凹2次関数の最小化問題

02003840 法政大学 *男全 勝行*OMATA Katsuyuki
02601770 法政大学 三竹 吉伸†MITAKE Yoshinobu
01900070 法政大学 若山 邦紘 WAKAYAMA Kunihiro

1 はじめに

本研究では、以下のように定式化される線形制約のもとでの凹2次関数の最小化問題を取り上げる。(図1)

$$\begin{aligned} \text{Min.} \quad f(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \\ \text{sub.to} \quad g_i(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i \geq 0 \quad i = 1, \cdots, m \end{aligned}$$

ただし、$\boldsymbol{D}$は正定符号、制約式に変数の非負条件が含まれており、許容領域が有界閉集合であることを仮定する。

この問題の特徴は、一般に許容領域の端点に局所的最適解が複数個存在することである。したがって、すべての端点のうちのどれかが大域的最適解となるが、そのための必要十分条件が存在しないため、効果的な解法がないといってよい。

そこで本研究は、罰金関数を定義することにより、まず比較的良い局所的最適解に収束するような内点法の初期解を求め、切除平面法の効果を大きくしようとするものである。

2 罰金関数と内点法

目的関数と制約条件式から、新たに以下のような罰金関数を定義し、それに対して許容領域の内点から降下法を用いることにする。

$$\begin{aligned} \text{Min.} \quad F(\boldsymbol{x}, k) &= f(\boldsymbol{x}) + k \sum_{i=1}^{m} \frac{\|\nabla g_i(\boldsymbol{x})\|}{g_i(\boldsymbol{x})} \\ k \quad &: \quad \text{罰金係数} (> 0) \end{aligned}$$

*法政大学大学院工学研究科システム工学専攻修士課程
†法政大学大学院工学研究科システム工学専攻修士課程

$F(\boldsymbol{x}, k)$は、$g_i(\boldsymbol{x}) = 0$に近づくにしたがい大きな値となり、制約付近で$F(\boldsymbol{x}, k) \to \infty$である。罰金項の分子は制約の効き方を基準化するものである。

3 初期解の選択

ここでは、$F(\boldsymbol{x}, k)$の罰金係数kを操作することにより、比較的良い解と思われる許容領域の端点を求める。

まずkを大きくしていくと、$F(\boldsymbol{x}, k)$は凸関数となるのでその最小点を求める。その点を$\boldsymbol{x}^*$とする。(図2)

次に$\boldsymbol{x}^*$を初期点として、$k \approx 0$とおいた$F(\boldsymbol{x}, k)$を$\boldsymbol{x}^*$から降下法で最小化すると、ある端点の近傍の点$\boldsymbol{x}^{**}$に収束する。(図3) この端点は他の解よりも良い局所的最適解であることが期待できる。特別な問題では、必ず最適解が得られる。

4 切除平面法の導入

$\boldsymbol{x}^{**}$の近傍の端点を$\boldsymbol{x}^\dagger$とする。さらにこの解を改善するために切除平面法を導入する。この方法は、求められた端点をもとに、その点における目的関数値より大きい値を取る範囲の許容領域を取り除いていくものである。(図4)

以上の操作を反復して行ない、すべての領域が取り除かれれば、それまでに得られた局所的最適解の中での最小解が大域的最適解である。

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

5 アルゴリズム

以上の一連の計算をまとめると以下のようになる。

Step 1. 罰金関数 $F(\boldsymbol{x},k)$ を定義する。X : 許容領域とする。

Step 2. $X=\emptyset$ なら終了。

Step 3. $F(\boldsymbol{x},k)$ が凸関数になるような k の値を定める。

Step 4. 許容領域内の任意の点から降下法を用いて、$F(\boldsymbol{x},k)$ の最小点 $\boldsymbol{x}^*$ を求める。

Step 5. $\boldsymbol{x}^*$ を初期点として、$k\approx 0$ とした $F(\boldsymbol{x}^*,k)$ を降下法を用いて最小化する。収束した点を $\boldsymbol{x}^{**}$ とする。

Step 6. $\boldsymbol{x}^{**}$ の近傍の端点を求め、その端点を $\boldsymbol{x}^\dagger$ とおく。

Step 7. 端点 $\boldsymbol{x}^\dagger$ において、切除平面を決定し、それを制約条件式に加える。Step 2 に戻る。

6 おわりに

本研究では、線形制約のもとでの凹2次関数の最小化問題に対し、罰金関数を定義し、切除平面法を併用したアルゴリズムを提案した。実際の問題に対しての実験は、まだ十分行なわれていない。そこで今後、目的関数が凹2次関数であるような輸送問題などに対しこのアルゴリズムを適用し、収束の早さや大域的収束性などその有効性を検証することが課題である。

参考文献

[1] K.Wakayama, "A Good Initial Solution for a Concave Minimization Programming", *Proceedings of ISORA'95*(1995)

[2] H.Konno, "Maximization of a convex quadratic function under linear constraints", *Mathematical Programming* 11(1976)111-127.

[3] R.Horst,H.Tuy, "Global Optimization Deterministic Approaches", Springer Verlag(1990).

[4] 今野 浩, 山下 浩, "非線形計画法", 日科技連出版(1978)

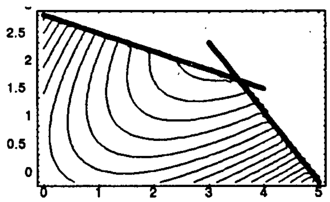

図 1: 目的関数 $f(x)$

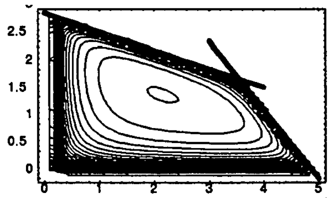

図 2: $F(x,k)$ kが十分大きいとき

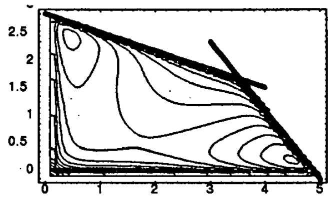

図 3: $F(x,k)$ kを小さくしたとき

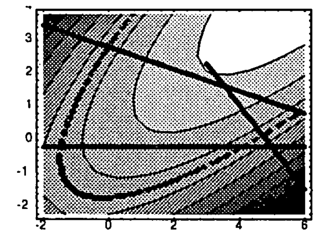

図 4: 切除平面法の導入

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.