1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

経路選択に自由度のある容量制約付きハブ・スポークモデル

奈良先端科学技術大学院大学 *佐々木 美裕 SASAKI Mihiro
奈良先端科学技術大学院大学 福島 雅夫 FUKUSHIMA Masao

1 はじめに

航空路のハブ・スポークモデルに関する研究は，約10年前のO'Kellyの論文[3]に始まる．最近では，ハブ空港の容量制約など，実際的な制約条件を加えたさまざまなモデルが提案されている[1, 2]．[1]では，ハブの容量制約付2-stop(経由するハブの数が高々2)モデルを0–1整数計画問題として定式化しているが，その定式化は非常に複雑であり，モデルの明確さに欠ける部分がある．一方，[2]では，今までの主な研究対象であったメディアン型や容量非制約型に加えて，センター型と被覆型のモデルを提案し，それぞれのモデルについて，さらに，枝の容量下限制約を課したモデル，枝の設定費用を考慮したモデルなどを提案している．[1]よりはわかりやすいモデルであり，また，経路選択に自由度を持たせたという点が目新しいが，具体的なアルゴリズムは与えられていない．

本稿では，解法，応用の両面において実用的なモデルとして，経路選択に自由度を持たせ，ハブ空港に容量制約を課した1-stop(経由するハブの数が高々1)のハブ・スポークモデルを提案し，混合0–1計画問題として定式化する．

2 モデルの説明

以下の記述において，次のように言葉の定義をする．

ODペア：	出発地と目的地のペア．
枝：	空港同士を直接結ぶ航路．
経路：	ある出発地から目的地に至る航路(枝)の列．

以下では，空港 i を出発地とし，空港 j を目的地とするODペアを $\langle i,j\rangle$ と表し，空港 i と空港 j を結ぶ枝を (i,j) と表すことにする．次のような問題を考える．

- 与えられたハブ候補集合 M の中から，乗客の移動費用とハブ空港設置費用の総和が最小になるように p 個のハブ空港を選択する．
- 1つのODペアに対して複数の経路を選択することを許す．
- 経由するハブ空港の数は高々1とする．
- ハブ空港と枝に容量制約がある．

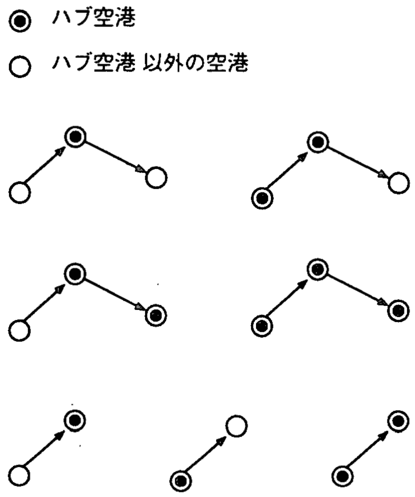

図1: 経路のパターン

- ネットワークに含まれる枝 (i,j) に対しては，i,j のいずれか一方，あるいは，双方がハブ候補集合 M に含まれるものとする．

このモデルにおいて，可能な経路のパターンを図1に示す．

3 定式化

問題を定式化するにあたり，次の記号を定義する．

N:	すべての空港の集合．$\lvert N\rvert = n$.
M:	ハブ候補の集合．$\lvert M\rvert = m \le n, M \subseteq N$.
Π:	すべてのODペア $\pi = \langle i,j\rangle, i \in N, j \in N, i \neq j$，の集合．$\lvert\Pi\rvert = n(n-1)$.
A_i:	出発地を $i \in N$ とするODペアの集合．$A_i \subset \Pi$.
B_j:	目的地を $j \in N$ とするODペアの集合．$B_j \subset \Pi$.
C_k:	$\pi \notin A_k$ かつ $\pi \notin B_k$ であるODペア π の集合．$C_k \subset \Pi$.
p:	選択するハブ空港の数．
d_π:	ODペア π の需要(乗客数)．
$c_{\pi k}$:	ODペアを π とする乗客がハブ空港 k を経由して移動するときの単位乗客あたりの費用．

f_k: ハブ空港 k の設置費用.
a_k: ハブ空港 k の容量.
b_{ij}: 枝 (i,j) の容量.
V: 十分に大きい正数.

決定変数は以下の通りである.

$x_{\pi k}$: OD ペアを π とする乗客のうち, ハブ空港 k を経由して移動する乗客数.

$$y_k: \begin{cases} 1: & \text{空港 } k \text{ をハブ空港とするとき,} \\ 0: & \text{空港 } k \text{ をハブ空港としないとき.} \end{cases}$$

以上のことをまとめると, この問題を次のような混合 0–1 計画問題に定式化できる.

minimize

$$\sum_{\pi \in \Pi} \sum_{k \in M} c_{\pi k} x_{\pi k} + \sum_{k \in M} f_k y_k \tag{1}$$

subject to

$$\sum_{k \in M} x_{\pi k} = d_\pi, \qquad \forall \pi \in \Pi, \tag{2}$$

$$\sum_{\pi \in A_i} x_{\pi j} + \sum_{\pi \in B_j} x_{\pi i} \le b_{ij}, \qquad \forall i, j \in M, i \ne j, \tag{3}$$

$$\sum_{\pi \in A_i} x_{\pi j} \le b_{ij}, \qquad \forall i \notin M, j \in M, i \ne j, \tag{4}$$

$$\sum_{\pi \in B_j} x_{\pi i} \le b_{ij}, \qquad \forall i \in M, j \notin M, i \ne j, \tag{5}$$

$$\sum_{k \in M} y_k = p, \tag{6}$$

$$\sum_{\pi \in C_k} x_{\pi k} \le a_k y_k, \qquad \forall k \in M, \tag{7}$$

$$x_{\pi k} \le V y_k, \qquad \forall \pi \notin C_k, \forall k \in M, \tag{8}$$

$$x_{\pi k} \ge 0, \qquad \forall \pi \in \Pi, \forall k \in M, \tag{9}$$

$$y_k \in \{0, 1\}, \qquad \forall k \in M. \tag{10}$$

制約条件 (2) は, OD ペアを π とする乗客は, いずれかのハブ空港を経由して移動することを示している. 制約条件 (3)–(5) は, 各枝の容量制約を表している. それぞれ, (3) は枝の両端点がハブ候補である場合, (4) は枝の終点がハブ候補である場合, (5) は枝の始点がハブ候補である場合に対応している. 制約条件 (6) は, p 個のハブを選択することを示している. 制約条件 (7) は, ハブ空港 k を通過する乗客の総和がハブ空港 k の容量を越えないことを表している. ただし, ハブ空港 k を通過する乗客数の中には, ハブ空港 k を出発地あるいは目的地とする乗客数は含まないとする. すなわち, ハブ空港 k を乗換え空港として通過する乗客数のみを数えるものとする. 制約条件 (8) は, 空港 k がハブでなければ経由することはできないことを示している. すなわち, $y_k = 1$ でなければ, $x_{\pi k} = 0 (\forall \pi \notin C_k)$ になることを示している. $x_{\pi k} (\forall \pi \in C_k)$ に関しては, 制約条件 (7) から, $y_k = 1$ でなければ, $x_{\pi k} = 0$ となることは明らかである.

OD ペア $\pi = \langle i, j \rangle$ に対して, $x_{\pi k}$ は, $i = k$ の場合, ハブ空港 $i (= k)$ から空港 j へ直接移動する乗客数を表し, $k = j$ の場合は, 空港 i からハブ空港 $k (= j)$ へ直接移動する乗客数を表すものと解釈できる. ここで, $y_i = 1$ かつ $y_j = 1$ の場合を考えると, 1 つの経路に対して 2 通りの表記ができる. すなわち, 変数 $x_{\pi i}$ と $x_{\pi j}$ の双方が, 同じ経路 (ハブ空港 $i \to$ ハブ空港 j) を利用する乗客数を表し, ハブ空港 i からハブ空港 j へ直接移動する乗客数は, 制約条件 (2) から, $x_{\pi i} + x_{\pi j}$ で与えられる.

4 おわりに

本稿では, 経路選択に自由度のある容量制約付きハブ・スポークモデルを混合 0–1 計画問題として定式化した. この問題の解法として, 施設配置問題に対してよい結果を出している Benders Decomposition の適用を試みている. 通常の容量制約付き施設配置問題は, 整数変数を固定すると輸送問題となるが, 今回提案したモデルはやや複雑な問題となるため, 実際に Benders Decomposition を用いて効率良く問題を解くためには, 工夫が必要である. 計算機実験の結果等については, 当日発表する.

参考文献

[1] T. Aykin: "Lagrangian Relaxation Based Approaches to Capacitated Hub-and-Spoke Network Design Problem", *European Journal of Operational Research*, Vol. 79, 1994, pp. 501–523.

[2] J. F. Campbell: "Integer Programming Formulations of Discrete Hub Location Problems", *European Journal of Operational Research*, Vol. 72, 1994, pp. 387–405.

[3] M. E. O'Kelly: "A Quadratic Integer Program for the Location of Interacting Hub Facilities", *European Journal of Operational Research*, Vol. 32, 1987, pp. 393–404.