Poker-Like Card Games

名古屋商科大　坂口 実 (Minoru Sakaguchi)

poker game の設定は(a) $(x, y) \sim U_{[0,1]} \times U_{[0,1]}$ で I は x を II は y を privately に observe する。(b) showdown ののちの payoff が $\mathrm{sgn}(x-y)$ で与えられる 0 和 game である、にもとづいている。この 2 条件はどちらも容易に改変できるから、いろいろの poker-like card games が考えられる。

5 a. Exchange games (EG)

player I (II) は自分の hand $x(y)$ をみたのちに keep/exchange (K/E と略記) のどちらかを選ぶ。showdown ののちに K-K (E-E) ならば keep (exchange) が行われる。その他の場合はそれぞれ確率 $p, \bar{p}$ で E-E、K-K がおこる。すなわち

$$(5.1)\quad \begin{array}{c} \\ \mathrm{K} \\ \mathrm{E} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathrm{K} & \mathrm{E} \end{array} \\ \begin{bmatrix} (x, y) & (py+\bar{p}x,\ px+\bar{p}y) \\ (py+\bar{p}x,\ px+\bar{p}y) & (y, x) \end{bmatrix} \end{array}$$

$p=0(1)$ ならば game は AND (OR) で、both (at least one) player が E を選んだときに exchange がおこる。

これを 0 和 game version にすると pay off matrix は

$$(5.2)\quad \begin{bmatrix} 1 & 1-2p \\ 1-2p & -1 \end{bmatrix}(x-y)$$

になる。これの bilateral-move version (*i. e.*, 先手一後手を導入したもの) は

(5.3)

Player & Hand	1st move	2nd move	Payoff to I
I ; x	K	K	$x-y$
		E	$(1-2p)(x-y)$
II ; y	E	K	$(1-2p)(x-y)$
		E	$y-x$

である。論文 [11, 12] では

> [定理](i) $a=\sqrt{p}/(\sqrt{\bar{p}}+\sqrt{p})$、$b=\left(\frac{1}{2}\right)(1+a)$、$c=a/2$ とおく。EG (5.2) の解は、"choose E, iff hand is <a", game の値は 0、である。
> (ii) EG (5.3) の解は次の通り：I chooses E, iff hand is <a. If I chooses K(E) then II chooses E, iff hand is <b(c)。game の値は $-(1/4)p(1-a)^2$ である。

を証明して、すべての議論を 3 人 0 和 game に拡張している。

EG は明らかに、Hi-Lo poker の一変種と見られる。(論文 [13])

5 b. Optimal stopping games (OSG)

poker の設定を optimal stopping problem と combine すると、次のような逐次 game が考えられる。(X_i, Y_i)、$i=1, 2, \cdots, n$、を *iid* seq. of r. v. で $[0, 1]^2$ 上の 2 変量一様分布からの sample とする。各 time $i=1, 2, \cdots$ で player I [II] は $X_i [Y_i]$ のみを private に look してから、accept (A) or reject (R) のどちらか一方を選択する。

$\left\{\begin{array}{l}\text{A-A}\\ \text{R-R}\end{array}\right\}$ のときは

{ game は END で決められた pagoff を受取る、
(X_i, Y_i) は reject され、次の sample (X_{i+1}, Y_{i+1}) に直面する。}

A-R (R-A) のときはそれぞれ確率 p_1、$\bar{p}_1$ (p_2, $\bar{p}_2$) で A-A、R-R が Umpire により強制される。各 player は停止時 τ における terminal payoff を最大にしたい。論文 [15] では(1) I への terminal payoff が $X_\tau - Y_\tau$ のときの 0 和 game (2) terminal payoffs が I、II へそれぞれ X_τ、Y_τ のときの非 0 和 game について、explicit solution を n、p_1、p_2 の関数として求めている。例えば(1)に対しては最適方程式

$$u_n = \mathrm{pval}\begin{bmatrix} x-y & p_1(x-y)+\bar{p}_1 u_{n-1} \\ p_2(x-y)+\bar{p}_2 u_{n-1} & u_{n-1} \end{bmatrix}$$

$(n \geqq 1 : u_0 \equiv 0)$.

これの解は：数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ が存在して I (II) は hand $> a_n(b_n)$ のときだけ accept する。a_n、b_n、u_n はある漸化式系により定まる。論文 [16] では、この他のいろいろの OSG を分類して紹介し open problems を述べている。

5 c. Cover-up games

X_1、X_2、$\cdots$、X_n を *iid* with $U_{[0,1]}$ とする。はじめ player I が x_1、x_2、$\cdots$、x_n を private にみてから、そのうちのどれか 1 つを open する。次に II が $(n-1)$ 個の covered numbers と 1 個の opened number のうちどれか 1 つをえらぶ。それが I から II へ支払われる。その期待値を I (II) は最小 (最大) にしたい。この game を Γ_n で表す。

I's strategy σ^0 (II's strategy τ^0)：情報を全く利用することなく、random に 1 つを open (choose) する。

II's strategy τ^*：opened number が $>1/2$ ならばそれを、$<1/2$ ならば covered number $(n-1)$ 個のうちの 1 個を random にえらぶ。

もしも I が stupid であれば σ^0 を出し、II の τ^* により $E\left(\frac{1}{2} \vee X\right)=5/8$ をとられる。II はどんなに stupid でも τ^0 により 1/2 はとれる。故に game の値を V_n とすると

$1/2 \leqq V_n \leqq 5/8 = 0.625$

である。game Γ_2 は Baston-Bostock (1988) が解い

た。I、IIの optimal strategy は

σ^*：X_1、X_2 のうち 1/2 に近い方を open する。

τ^*：上記の通りであって game の値は $V_2=7/12\fallingdotseq 0.58333$。$\Gamma_n$ ($n\geqq 3$) は未解決である（値の存在だけは証明されているが）。

Γ_3 であっても解を求めるのは大変に難しい。K. T. Lee (1990) は近似解を求めているが、それによると

I's strategy $\bar{\sigma}$：ある区間 $[d,\overline{d}]\subseteqq[0,1]$、ただし $d\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$、の中にある bell-shaped cdf により r. v. T をえらび、X_1、X_2、X_3 の全部が T より大(小、それ以外)ならば最小(最大、中間)のものを open する。

II's strategy $\bar{\tau}$：I の opened number が x のとき、それと、他の2個とから1個をそれぞれ確率 $p(x)$、$\frac{1}{2}(1-p(x))$、$\frac{1}{2}(1-p(x))$、でえらぶ。ただし

$$p(x)=\begin{cases}0, & \text{if } 0<x<0.4431\\ 0.2714, & \text{if } 0.4431<x<0.5149\\ 0.4594, & \text{if } 0.5149<x<0.6068\\ 1, & \text{if } 0.6068<x<1\end{cases}$$

がそれぞれ nearly optimal であり、game の値は $0.52876<V_3<0.53215$ である。

問題をもっと一般的にすると次のようになるだろう。I は $(x_1,\cdots,x_n)$ を private にみてから、そのうちのどれか k 個をえらんで open にし、残り $(n-k)$ 個を cover する。II は opened number の中の最大のものか、または covered number から random にとった1個のどちらかを選ぶ。この game $\Gamma(n,k)$ を解け。$\Gamma(n,1)$ ($n\geqq 3$) は未解決、$\Gamma(3,2)$ でさえも未解決である。つまりこれらは easy to state but very hard to solve explicitly な問題である。

論文［14］は $n=2$ で X_1 と X_2 とが独立でないとき、解はどうなるかを調べたものである。論文［8］は cover-up game を multi-stage にしたものである。

I は $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ を1つずつ逐次に observe する。t-th stage では I は x_t を private にみてから、それを open/cover のどちらかを選ぶ。I が open (cover) のときは II は x_t を知って（知らないで）それを accept/reject のどちらかを選ぶ。open-reject or cover-reject のときは、process は続いて I が次の x_{t+1} に直面する：

Player & Hand	1st move	2nd move	Payoff to II
I: x_t	Open		
	Cover		
II	(Open →)	Accept	x_t
		Reject	→ Cont. to next stage
	(Cover →)	Accept	x_t
		Reject	→ Cont. to next stage

ただし、ここで I は高々 m 回の cover が許されている、という制約をもつ。この game $G(m,n)$ の値を $v_n^{(m)}$、X の cdf を $F(\cdot)$ とすると最適方程式は

$$v_n^{(m)}=\max_{\beta\in[0,1]}\min_{\alpha(\cdot)}K_n^{(m)}(\alpha(\cdot),\beta),$$

$$K_n^{(m)}(\alpha(\cdot),\beta)=\int_0^{\infty}\{\alpha(x)(x\vee v_{n-1}^{(m)})+\overline{\alpha}(x)(\beta x+\overline{\beta}v_{n-1}^{(m-1)})\}dF(x),$$

ただし

$v_n^{(n)}=u_n$, where $u_n=\mathrm{E}(X\vee u_{n-1})$, $n\geqq 1$, $u_0\equiv 0$.

$v_m^{(m)}=\mathrm{EX}$, if $m\geqq 1$; $=0$, if $m=0$

$(0\leqq m\leqq n=1,2,\cdots)$

論文［8］によるとこれの解は：数列 $\{a_n^{(m)}\}$, $\{\beta_n^{(m)}\}$ が存在して I は state $(m,n|x)$ において

open, if $a_n^{(m)}<x<v_{n-1}^{(m-1)}$; cover, if otherwise.

II は、I が open のときは accept (reject)、if $x>(<)v_{n-1}^{(m)}$。I が cover のときはそれぞれ確率 $\beta_n^{(m)}$、$\overline{\beta}_n^{(m)}$ で accept、reject を mix する。

$v_n^{(m)}$、$a_n^{(m)}$、$\beta_n^{(m)}$ などはある漸化式系で定まる。数値例をあげると、例えば $X\sim U_{[0,1]}$、$n=12$ とすると II は $m=1$、2、3 のときにそれぞれ 0.8126、0.7561、0.7067 をうる。I は $m\geqq 1$ のとき小さな cover して II を惑乱させることにより $m=0$ のときの 0.8791 よりずっと小さい値しか与えない。

game Γ ($1\leqq k\leqq n$, $n\geqq 3$) が解けたのちは次の多段 game に進む：I は $(X_1,\cdots,X_n)$ を private に一度に observe して、逐次にそのうちの1個ずつをえらんで、高々 $(n-1)$ 個まで open してゆく。II はその都度、今までに open されたものの最大のものか covered のものの中から random にえらんだ1個か、それとも pass して料金 $c\in[0,1)$ を払って I に次の新しい1個を open してもらうかの何れかをえらぶ。この多段2人0和 game を解け。$n=3$ の場合でさえ非常に難解である。

［文けん］[8] MJ 37 (1992) 813-826 [11] MJ 38 (1993), 791-801. [12] Intern. Year Book of GTA. 2 (1994) 1-25. [13] MJ 43 (1995) To appear. [14] MJ 35 (1990), 527-536. [15] MJ 41 (1995), 677-687. [16] 42 (1995), 343-351.