1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

マルコフ変調ランダムウォークの極限分布の漸近的性質

01605320 東京工業大学 牧本 直樹† MAKIMOTO Naoki
02102690 東京工業大学 加藤 憲一 KATOU Kenichi

1. はじめに

$\{X_n\}$ を $\mathcal{N}=\{0,1,2,\cdots\}$ 上のエルゴード的な離散時間マルコフ連鎖とし，その推移確率行列を $\boldsymbol{P}$，定常分布を $\pi=(\pi_i)$ とする．また $\{A_n(i);\ n\in\mathcal{N}\}$ を互いに独立で同一分布に従う $\mathcal{Z}=\{\cdots,-1,0,1,\cdots\}$ 上の確率変数列とし，その確率関数を

$$\mathrm{P}\left(A_n(i)=k\right)=q_i(k),\qquad k\in\mathcal{Z},\ n\in\mathcal{N}$$

とおく．このとき，$Y_0=y_0$ から始めて

$$Y_n=[Y_{n-1}+A_n(X_n)]^+,\quad n=1,2,\cdots$$

で再帰的に定義される $\mathcal{N}$ 上の確率過程をマルコフ変調ランダムウォークと呼ぶ [4]．$A_n(i)$ の分布が算術的でなく，安定条件

$$\mu=\sum_{i\in\mathcal{N}}\mathrm{E}\left(A_n(i)\right)\pi_i<0$$

が成り立てば，極限分布

$$m_j(k)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(Y_n=k,X_n=j\,|\,X_0=i\right)$$

が存在して初期状態 i に依存しない [4].

$m_j(k)$ の $k\to\infty$ のときの性質に関して，Liu et. al [4] は，ある条件のもとで正数 a_j，b_j と $\lambda>1$ が存在して

$$a_j\le\lambda^k\mathrm{P}\left(Y_n=k,X_n=j\,|\,X_0=i\right)\le b_j,\qquad j,k,n\in\mathcal{N}$$

が成り立つことを示した．また，Falkenberg [2] は，$\{X_n\}$ の状態空間が有限でかつ $A_n(i)$ のサポートが下に有界であるとき，

$$\lim_{k\to\infty}\lambda^k m_j(k)=c_j$$

となることを示している．本稿では，Feller [3] の方法を一般化することにより，Liu et. al [4] の条件のもとで (1) が成立することを示し，さらに λ と c_j を求める．

2. 主な結果

π_i を ii 成分にもつ対角行列を $\boldsymbol{\Pi}$ とし，$\tilde{\boldsymbol{P}}=\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{P}^t\boldsymbol{\Pi}$，$\boldsymbol{Q}(k)$ を $q_i(k)$ を ii 成分にもつ対角行列とする．

$$\boldsymbol{R}(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}z^k\tilde{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{Q}(k)$$

の上側および下側収束座標をそれぞれ

$$\sigma_+ = \sup\{z\ :\ \boldsymbol{R}(z)<\infty\}$$
$$\sigma_- = \inf\{z\ :\ \boldsymbol{R}(z)<\infty\}$$

とする．また，$\boldsymbol{R}(z)$ の実最大固有値を $\phi(z)$，対応する右固有ベクトルを $\boldsymbol{r}(z)=(r_i(z))$ とおく．Liu et. al [4] と同様に

(A1) $\sigma_-<1<\sigma_+$
(A2) $\lim_{z\uparrow\sigma_+}\phi(z)>1$

を仮定すると，$\phi(\lambda)=1$ なる実数 $\lambda>1$ が一意に存在する．

定理 任意の $j\in\mathcal{N}$ に対して

$$\lim_{k\to\infty}\lambda^k m_j(k)=c_j \tag{1}$$

が成立する．ここで c_j は次節 (5) で与えられる．

3. 証明の概要

基本的には，$\{A_n(i)\}$ がランダムウォーク，つまり独立で同一の分布に従う場合に対する Feller [3] の手法を，マルコフ変調ランダムウォークの場合へ一般化して適用する．

まず，$\{\tilde{X}_n\}$ を推移確率行列 $\tilde{\boldsymbol{P}}$ に支配されるマルコフ連鎖とし，$\{\tilde{X}_n\}$ から生成されるマルコフ変調ランダムウォーク $\{S_n\}$ を

$$S_n=\sum_{\ell=1}^{n}A_\ell(\tilde{X}_\ell)$$

で定義する．このとき，サンプルパスの双対性の議論 [5] から次の結果が成立する．

補題 1 任意の $j\in\mathcal{N}$ に対して

$$m_j(k)=\mathrm{P}\left(\max_{1\le n}(S_n)\ge k\,\middle|\,X_0=j\right)\pi_j.$$

次に，マルコフ変調ランダムウォーク $\{S_n\}$ の正領域への初到達時点を T とし $H=S_T$ とする．さらに列ベクトル

$$\boldsymbol{m}(k) = (m_0(k),m_1(k),\cdots)^t$$
$$\boldsymbol{h}(k) = (\alpha_0(k),\alpha_1(k),\cdots)^t$$

および行列

$$\boldsymbol{H}(k)=(\beta_{j\ell}(k))$$

を定義する．ただし，

$$\begin{aligned}\alpha_j(k) &= \mathrm{P}\,(H \geq k \,|\, X_0 = j),\\ \beta_{j\ell}(k) &= \mathrm{P}\,(H = k, X_T = \ell \,|\, X_0 = j)\end{aligned}$$

である．このとき，ベクトル型の再生方程式

$$\boldsymbol{m}(k) = \boldsymbol{h}(k) + \sum_{i=1}^{k-1} \boldsymbol{H}(i)\boldsymbol{m}(k-i) \qquad (2)$$

が成立する．一般に，$\boldsymbol{h}(k)$，$\boldsymbol{H}(k)$ が与えられたベクトル型の再生方程式

$$\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{h}(k) + \sum_{i=1}^{k-1} \boldsymbol{H}(i)\boldsymbol{x}(k-i), \quad k \in \mathcal{N}$$

において

(C1) $\boldsymbol{H} = \sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{H}(k)$ が確率行列

(C2) $\mu = \boldsymbol{\xi}\,(\sum_{k=1}^{\infty} k\boldsymbol{H}(k))\,\boldsymbol{e} < \infty$
$\boldsymbol{\xi}$ は $\boldsymbol{H}$ の定常分布

(C3) $\boldsymbol{h}(k) \geq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{h} = \sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{h}(k) < \infty$

が成り立つならば，再生定理

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}(k) = \frac{(\boldsymbol{\xi h})}{\mu}\boldsymbol{e} \qquad (3)$$

が成り立つことが示される．しかし，(2) では $\boldsymbol{H} = \sum_{i\in\mathcal{N}} \boldsymbol{H}(i)$ が確率行列でないため，そのままでは再生定理が使えない．そこで，$r_i(\lambda)$ を ii 成分とする対角行列を $\boldsymbol{D}$ とし，(2) を補正した再生方程式

$$\begin{aligned}\lambda^k \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{m}(k) &= \lambda^k \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{h}(k) \qquad (4)\\ &+ \sum_{i=1}^{k-1} \lambda^k \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{H}(i)\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{m}(k-i)\end{aligned}$$

を考える．このとき，

$$\tilde{\boldsymbol{H}} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{H}(k)\boldsymbol{D}$$

は確率行列となり，また (C2) および $\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{h}(k)$ に対して (C3) も成り立つ．したがって，(4) に (3) を適用すると，最終的に

$$\lim_{k\to\infty} \lambda^k m_j(k) = c_j$$

を得る．ただし，

$$c_j = \frac{\lambda(\tilde{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{m}(0))}{\mu(\lambda-1)}\pi_j r_j(\lambda). \qquad (5)$$

また $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ は確率行列 $\tilde{\boldsymbol{H}}$ の定常分布，ベクトル $\boldsymbol{m}(0) = (m_0(0), m_1(0), \cdots)^t$ は

$$m_j(0) = \mathrm{P}\left(\max_{1\leq n}(S_n) < 0 \,\middle|\, \tilde{X}_0 = j\right)$$

である（S_n は負のドリフトをもつ）．

4. 待ち行列モデルへの応用

$\{X_n\}$ をシステム内部の状態変化および外部環境の変化を表す過程とみなし，そのときの到着／退去を合わせた系内人数の変化を $A_n(X_n)$ と考えれば，(1) で定義される $\{Y_n\}$ は待ち行列システムの系内数過程となる．

ATM ネットワークでは，微小な（$\sim 10^{-10}$）セル廃棄率を評価する必要があるため，本稿で述べたような待ち行列モデルの定常分布の漸近解析に関する研究が近年なされている [1, 2, 4, 6 およびそれらの参考文献を参照]．このような漸近解析を応用するには，減衰率（λ）と係数（c_j）を求めることが重要である．多くのモデルでは，減衰率は比較的容易に定まるが，係数を陽に求めることは難しい．本稿の結果でも，係数 c_j は未知の確率ベクトルを $\boldsymbol{m}(0)$ を含んでおり，ランダムウォークの性質を用いた近似や上下界の評価などが必要であろう．

参考文献

[1] N.G. Duffield, J.T. Lewis and N. O'Connell, Predicting quality of service for traffic with long–range fluctuations, *IEEE ICC '95*, 473–477, 1995.

[2] E. Falkenberg, On the asymptotic behavior of the stationary distribution of Markov chains of M/G/1 type, *Stoch. Models*, **10**, 75–98, 1994.

[3] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Wiley, 1970.

[4] Z. Liu, P. Nain and D. Towsley, Exponential bounds with an application to call admission, submitted for publication, 1994.

[5] K. Sigman, Monotone stochastic recursions and their duals, *Symposium on Performance Models for Information Communication Networks*, 54–65, 1994.

[6] W. Whitt, Tail probabilities with statistical muliplexing and effective bandwidths in multi–class queues, *Telecommunication Systems*, **2**, 71–107, 1993.