測定器の故障診断システムの最適設計

01603626　九州大学　松山久義　MATSUYAMA Hisayoshi

プラントの定常運転時の測定値にχ^2検定を適用して測定器の故障を診断する方法は古くから多数報告されているが，これらの診断法を用いて要求された仕様を満足する故障診断システムを設計する方法論は与えられていない。故障診断システムに要求される仕様の中で最も重要なものは、以下の４項目である。

①診断の対象となる測定器の集合R
②第１種の誤り（誤報）の確率の上限値p_F
③検出すべき故障（偏差）の大きさの下限値と測定器の精度（標準偏差）との比y_M
④第２種の誤り（欠報）の確率の上限値p_M

ここでは、測定器の配置の変更を，

［交　換］　既存の測定器を精度の異なる測定器と交換する
［多重化］　既存の測定器と同じ変数を測定する測定器を追加する

に限定し、仕様R, p_F, y_M, p_Mを満足するように測定器の配置とχ自乗検定の有意水準δを決定する設計法を提案する。

１．カイ自乗検定による測定器の故障診断

n個の測定変数$z_j\,(j=1,2,\cdots,n)$について次式のようなm個の関係式が得られたものとする。

$$Cz=0 \tag{1}$$

ただし，$z=[z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n]^T$であり，$C$のランクは$m$であるものとする。

測定変数z_jの測定値z_j^*が誤差e_jを含むとすると、次式が成立する。

$$z^*=z+e \tag{2}$$

ただし，
$$e=[e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n]^T \tag{3}$$
$$z^*=[z_1^*,\ z_2^*,\ \cdots,\ z_n^*]^T \tag{4}$$

ここで、誤差e_jは，平均値0、分散σ_j^2の正規分布に従うランダム誤差と系統的誤差（測定器jの故障によって発生する偏差μ_j）の和である。

Eq.(2)をEq.(1)に代入して整理すると，

$$Ce=Cz^* \tag{5}$$

測定器の故障診断とは、Eq.(5)を満足する e_jの中で、平均値が0でないものを探索することである。測定器の全集合をJとし，集合$F(\subseteq J)$の中に故障した測定器がすべて含まれる場合には、次のような最小化問題の解$w(F)$は自由度$(m-|F|)$の中心χ^2分布に従う[1]。

$$\underset{e}{\text{Minimize}}\quad w(F)=e^TSD(F)e \tag{6}$$

$$\text{Subject to}\quad Ce=Cz^* \tag{7}$$

ただし、$|F|$はFの要素数を表し，

$$S=\mathrm{diag}[\sigma_1^{-2},\sigma_2^{-2},\ \cdots,\ \sigma_n^{-2}] \tag{8}$$

$$D(F)=\mathrm{diag}[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n] \tag{9}$$

$$\alpha_j=\begin{cases}1 & (j\in J-F)\\ 0 & (j\in F)\end{cases} \tag{10}$$

［問題終り］

$w(F)$は自由度$(m-|F|)$の中心χ^2分布に従うので、測定器の故障診断問題は次のように定式化できる。

【故障診断問題】 $\chi^2(\nu,\delta)$を自由度νの中心χ^2分布のδパーセント点とするとき、測定器の集合Jの部分集合Fの中で、

$$w(F)\leqq\chi^2(m-|F|,\delta) \tag{11}$$

を満足し、かつ、要素数$|F|$が最小となるものを求めよ。また、そのような集合が複数個存在する場合には、$w(F)$を最小とするものを求めよ。［問題終り］

２．故障診断システムの設計問題の定式化

全ての測定器が正常であるときに、どれかの測定器を誤って故障と判断することを“誤報”と定義すると、前記の定式化に従えば、誤報の確率はχ^2検定の有意水準δに等しい。一方、ある測定器が故障しているとき（測定値に偏差が存在するとき）に、それを故障と判断しないことを“欠報”と呼ぶ。当然、欠報の確率は偏差の大きさに依存する。故障している測定器の組合せにより、欠報には種々の場合が考えられるが、測定器jだけが故障しているとき、全ての測定器が正常であると判定される場合を“測定器jの欠報”と定義すると，測定器jの欠報の確率は$\Pi(\chi^2(m,\delta);m,d_jy_M^2)$で表される[1]。ここで、$\Pi(x;\nu,\lambda)$は自由度$\nu$、非心率$\lambda$の非心$\chi^2$分布の累積分布関数であり、$d_j$は測定器$j$の“検出力”と呼ばれ、$c_j$を$C$の第$j$列とすると、次のように与えられる。

$$d_j=\sigma_j^2c_j^T\{CS^{-1}C^T\}^{-1}c_j\quad(j\in J) \tag{12}$$

したがって，与えられた測定器の配置をそのまま用いて要求仕様を満たすように故障診断システムを設計する問題は次のように定式化できる。

【設計問題(1)】　次式を満たすδを求めよ。

$$\delta\leqq p_F \tag{13}$$

$$\Pi(\chi^2(m,\delta);\ m,\ d_{min}y_M^2)\leqq p_M \tag{14}$$

ただし、
$$d_{min}=\underset{j\in R}{\mathrm{Min}}\ d_j \tag{15}$$

［問題終り］

既存の測定器の位置を“測定点”と呼び，測定点jにどのような精度の測定器を何個設置するかをω_jで表し，測定点の配置ωを次のように定義する。

$$\omega=\{\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_n\} \tag{16}$$

測定点jの測定器の個数を$t(\omega_j)$で表すと，変更後の関

係式の総数$r(\omega)$は次のように表される。

$$r(\omega)=\sum_{j\in J}t(\omega_j)+m-n \tag{17}$$

測定点jの測定器の設置費用を$K_j(\omega_j)$とすると，測定器の配置の変更を伴う故障診断システムの設計問題は、次のように定式化できる。

【設計問題(2)】

$$\underset{\omega}{\mathrm{Minimize}}\ K(\omega)=\sum_{j\in J}K_j(\omega_j) \tag{18}$$

$$\mathrm{Subject\ to}\quad \sigma_j\leqq\sigma_j^0 \quad (j\in J) \tag{19}$$

$$\delta\leqq p_F \tag{20}$$

$$\Pi(\chi^2(r(\omega),\delta);\ r(\omega),\ d_{min}y_M^2)\leqq p_M \tag{21}$$

$$d_{min}=\underset{j\in R}{\mathrm{Min}}\ d_j \tag{22}$$

［問題終り］

3．組合せ論的最適化問題への変換

誤報の確率はδに等しく、Eq.(21)の左辺はδに関して単調減少であり、誤報より欠報の方が危険であるので、条件(20)と(21)は

$$\delta=p_F \tag{23}$$

$$\Pi(\chi^2(r(\omega),p_F);\ r(\omega),\ d_{min}y_M^2)\leqq p_M \tag{24}$$

に置き換えることができる。ここで、

$$\Pi(\chi^2(r(\omega),p_F);\ r(\omega),\ d_My_M^2)=p_M \tag{25}$$

を満たすd_Mを“限界検出力”と呼び，$d_M(r(\omega),p_F;p_M,y_M)$と表すと、Eq.(24)の左辺は$d_{min}$に関して単調減少であるので、条件(24)を次の条件に置き換えることができる。

$$d_{min}\geqq d_M(r(\omega),p_F;p_M,y_M) \tag{26}$$

測定器の精度σ_jは、カタログに記載されているいくつかの測定器の型に対応する値の中から選ぶことになる。したがって、ω_jは採用する測定器の型とそれらの数によって表現できる。測定点jにおいて条件(19)を満たす測定器の型とそれらの数の全集合をΩ_jと表し、集合Ωをこれらの直積として

$$\Omega=\Omega_1\times\Omega_2\times\cdots\times\Omega_n \tag{27}$$

と定義すると、設計問題(2)は次のように組合せ論的最適化問題に変換できる。

【設計問題(2′)】

$$\underset{\omega\in\Omega}{\mathrm{Minimize}}\ K(\omega)=\sum_{j\in J}K_j(\omega_j) \tag{28}$$

$$\mathrm{Subject\ to}\ \underset{j\in R}{\mathrm{Min}}\ d_j\geqq d_M(r(\omega),p_F;p_M,y_M) \tag{29}$$

4．数値実験

7個（$F1\sim F7$）の流量計の測定値間に次のような関係式が成立する系を考える。

$$\begin{cases} F1-F2-F3=0 \\ F2-F4-F5=0 \\ F3-F6-F7=0 \end{cases} \tag{30}$$

各測定点に設置可能な流量計には、表１に示すように、低精度型(L)と高精度型(H)があるものとし、原配置においてはすべてL型の流量計が使用されているものとする。さらに、測定点jの配置ω_jの費用$K_j(\omega_j)$は次のように表されるものとする。

$$K_j(\omega_j)=\sum_{k\in\omega_j}\{3.0Z_k^{1/2}(Z_k/\sigma_k)+100.0\} \tag{31}$$

のとする。ただし，Z_kは流量計kのフルスケールである。

表１　候補となる流量計のフルスケールと精度

Flow meter	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Full scale [kg/h]	100	40	60	10	30	30	30
Type	L	L	L	L	L	L	L
Std. dev. [kg/h]	2.00	0.80	1.20	0.20	0.60	0.60	0.60
Type	H	H	H	H	H	H	H
Std. dev. [kg/h]	1.00	0.40	0.60	0.10	0.30	0.30	0.30

［要求仕様］　① $R=\{1,2,3,4,5,6,7\}$
② $p_F=0.1$
③ $y_M=6.0$
④ $p_M=0.05$

［最適配置］　F1 F2 F3 F4 F5 F6 F7
L1 L1 L1 L3 L2 L2 L2

限界検出力：0.5207234，費用：11163

表２　最適配置における各測定点の多重度，検出力，欠報確率，欠報頻度

# of meter	Type	Detect.	Prob. of mis-alarm	Freq. of mis-alarm
1	L1	0.901616	2.475207e-03	10/2000
2	L1	0.775765	7.565044e-03	20/2000
3	L1	0.812983	5.470083e-03	15/2000
4	L3	0.672591	1.803865e-02	34/2000
5	L2	0.619965	2.758520e-02	49/2000
6	L2	0.562983	4.301744e-02	89/2000
7	L2	0.562983	4.301744e-02	97/2000

5．まとめ

χ^2検定による測定器の故障診断システムの設計問題を、要求された仕様を満たし、かつ、費用最小の測定器の配置を探索する問題として定式化し、その解法を示した。ただし、本稿で示した設計法は、測定変数間に成立する等号制約式が比較的少なく、多重化によって等号制約式を増やすことが欠報確率の低下に貢献する場合にのみ有効である。

引用文献

1) Fuchino, K., S. Tateno, K. Kawabata, Y. Tsuge and H. Matsuyama;
Kagaku Kogaku Ronbunshu, 21,766-775 (1995)