

単一機械総納期遅れ時間最小化スケジューリングの最適解法

01505100 東京理科大学 平川 保博 HIRAKAWA Yasuhiro

1. はじめに

処理時間 P_j と納期 D_j が既知の n 個のジョブ J_j , ($j=1, \dots, n$)がある。これらのジョブは、単一機械で一つずつ処理される。納期遅れが生じないように処理順序を決定したいが、一般に、それは困難である。そこで、納期遅れ時間の総和が最小になる処理スケジュールの作成を考える。これは、総納期遅れ時間最小化スケジューリング問題と呼ばれる。この問題はNP困難で、ジョブ数の増加に伴い、最適解を得るための計算時間は急激に増加すると言われている[1,2]。

総納期遅れ時間最小化スケジューリング問題に対し、1977年、Lawler[2,4]は、最適スケジュールの要件を保持して、問題を部分問題に分割する定理を示し、計算時間の大幅な短縮を達成している。しかしながら、その後も、計算時間の改善が不十分との主張を基に、時間短縮のためのヒューリスティック解法についての研究が続けられている[3,5,6]。

本研究の目的は、Lawlerの分割定理に分枝限定法を適用した最適解法を提案し、その有効性を明らかにすることである。ここでは、計算アルゴリズムおよび下界値の設定に工夫がなされ、計算時間の短縮が計られる。また、 $n=10\sim 100$ ジョブにつて、各々、20,000問題という大規模な数値実験によって、その実用性が検証される。

2. スケジューリング問題の定式化

処理順序が j 番目のジョブ番号を記号 $\langle j \rangle$ で表す。このとき、スケジュール $[\langle 1 \rangle, \dots, \langle n \rangle]$ の j 番目に位置するジョブの処理完了時刻 T_j と納期遅れ時間 W_j は、次式で定義される (但し、 $T_0=0$)。

$$T_j = T_{j-1} + P_{\langle j \rangle}, \quad (j=1, \dots, n) \quad (1)$$

$$W_j = \max(T_j - D_{\langle j \rangle}, 0), \quad (j=1, \dots, n) \quad (2)$$

また、問題の評価関数は、次式で表される。

$$\sum_{j=1}^n W_j \quad (3)$$

3. Lawlerの分割定理

納期順のスケジュール $[\langle m_1 \rangle, \dots, \langle m_2 \rangle]$ をもつ問題の分割を考える。このとき、Lawlerの分割定理は、次の①～⑤で説明される。

①スケジュール $[\langle m_1 \rangle, \dots, \langle m_2 \rangle]$ 内の最小処理時間ジョブの順位を j^* とする。

② j 番目のジョブ $J_{\langle j \rangle}$ の処理完了時刻 T_j と $j+1$ 番目のジョブ $J_{\langle j+1 \rangle}$ の納期 $D_{\langle j+1 \rangle}$ との大小関係に関する命題 A_j を定義する。

$$A_j : T_j < D_{\langle j+1 \rangle}, \quad j^* \leq j \leq m_2. \quad (4)$$

③命題 $\sim A_{\langle k^*-1 \rangle} \wedge A_{\langle k^* \rangle}$ が真である位置を k^* とする (ここに、 $A_{\langle m_1-1 \rangle}$ と $A_{\langle m_2 \rangle}$ は真とする)。位置 k^* は、一般に、複数存在する。

④位置 j^* と k^* より、スケジューリング問題 $[J_{\langle m_1 \rangle}, \dots, J_{\langle m_2 \rangle}]$ は、図1に示されるように、ジョブ $J_{\langle j^* \rangle}$ を位置 k^* に移動し、3つ (2つ) の部分問題: $[J_{\langle m_1 \rangle}, \dots, J_{\langle k^* \rangle}]$ $[J_{\langle j^* \rangle}]$ $[J_{\langle k^*+1 \rangle}, \dots, J_{\langle m_2 \rangle}]$ に分割される。

⑤最適性を保持する分割は、③で求めた位置 k^* での分割パターンの中のいずれかである。

従って、Lawlerの分割定理を利用したスケジューリング法では、すべてのパターンの中から、総納期遅れ時間を最小にするスケジュールを探索することになる。問題の分割は、分割された問題のジョブ数が1になるまで続けられ、ジョブの位置が確定する。1回の分割で、問題は、少なくとも2つの部分問題になる。従って、多くても $(n-1)$ 回の分割を行えば、1つのスケジュールは確定する。また、(4)式の条件より、隣接順位での分割はあり得ず、 n ジョブ問題での分割パターンの数は $n/2$ 以下である。

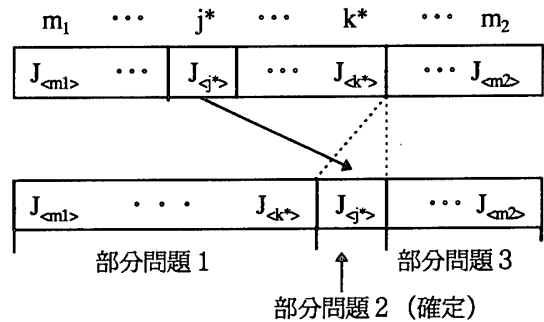


図1 部分問題への分割

4. 分枝限定アルゴリズム

提案する分枝限定アルゴリズムは、任意の分枝レベル s の部分問題 $[\langle m_{s1} \rangle, \dots, \langle m_{s2} \rangle]$ を基本に構成される。ここでは、 m_{s1} 番目の処理の開始可能時刻 $T_{m_{s1}}$ と、確定した1位から m_1-1 位までのスケジュールの総納期遅れ時間 W_{m_1-1} が含まれる。

4.1 問題分割の分枝過程

問題の分割は、次の手順1, 2, 3で行われる。また、図2に、問題分割の分枝過程の流れを示す。

[手順1] 分割パターンの生成

レベル s の部分問題 $[<m_{s1}>, \dots, <m_{s2}>]$ から、1) 最大処理時間ジョブの順位 j^* , 2) 分割点 k^* , $r=1, \dots, R_s$ を求め、 R_s 個の分割パターンを生成する。

[手順2] スケジュールの確定

分割パターン r に対し、若い順位の部分問題からスケジュールを作成する。部分問題のジョブ数が2以上ならば、分枝レベルを $s+1$ とし、手順1で分割を繰り返す。部分問題のジョブ数が1ならば、スケジュールを確定し、次の順位の部分問題を解く。

[手順3] 部分問題の最適スケジュール

分枝レベル s のすべての分割パターンの中で総納期遅れ時間を最小にするスケジュールを求め、分枝レベル $s-1$ の部分問題の解とする。 $s=1$ まで、手順2, 3を繰り返す。

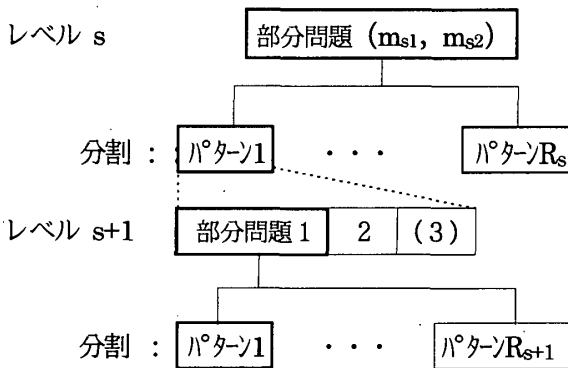


図2 問題分割の分枝過程

4.2 下界値の改良

レベル s の分割パターンにおいて、最大処理時間ジョブ J_{j^*} の処理順位は確定する。このジョブの納期遅れ時間は、後に、分割パターンの総納期遅れ時間に加えられる。そこで、この値を前の部分問題の総納期遅れ時間の初期値に、事前に、加えておく。これによって、不必要な分枝を減じることが可能である。

5. 数値例による性能評価

ジョブ数 $n=10\sim 100$ と2段階の納期の厳しさの組の、各々、10000 問題で提案解法の性能を評価する。

処理時間 P_j は、 $[1, 99]$ の一様乱数、納期は $[P_j, 50n - C28\sqrt{n}]$ ($C=0,1$) の一様乱数の整数値として生成した。Cにより、納期の厳しさを変更している。

問題分割の対比として、通常の B&B 法①、下界改良の対比として問題分割の B&B 法②を用い、下界を改良した提案法 (B&B 法②+) の性能について解析した。

図1は、3つの最適解法に対するジョブ数 n と10,000 個の問題の計算時間の関係を示している。実線は、納期の緩い $C=0$ の場合、点線は $C=1$ の厳しい場合の結果である。

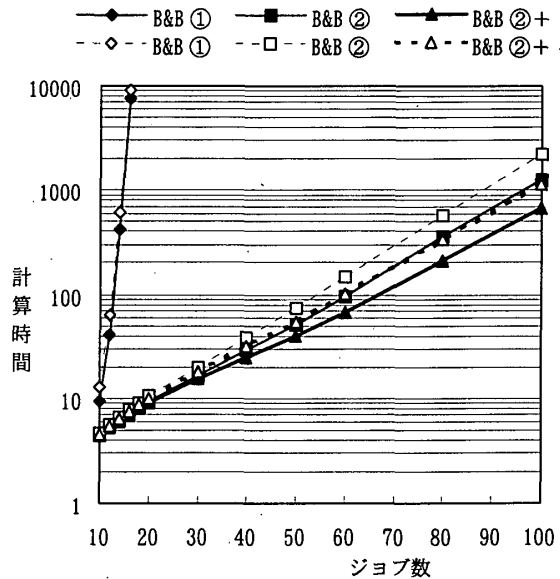


図3 ジョブ数と計算時間

計算には、COMPAQ 5120 (Pentium™120MHz)で、Lahey Fortran 90 が使用されている。

5. 結論

単一機械総納期遅れ時間最小化スケジューリング問題に対して有効な最適解法が提案された。そこでは、問題分割に分枝限定法が適用し、さらに、下界計算の改良して、大幅な時間短縮を実現している。

参考文献

- [1] 茨木 俊秀 : 39,10,(1994),541-546.
- [2] Brucker,P.: *Scheduling Algorithms*, (Springer, 1995)
- [3] Holsenback,J.E. and R.M.Russell : *J. of Operational Research Society*, 43, 1 (1992), 53-62.
- [4] Lawler,E.L.: *Annals of Discrete Mathematics*, 1, (1977), 331-342.
- [5] Potts,C.N., L.N.Von Wassenhove : *Operations Research*, (1982),177-181.
- [6] // : *IIE Transactions*, 23, (1991), 346-354.