

# 任意の領域の道路延長を推定する公式 — thickness の導入による腰塚の推定公式の一般化 —

01107680 慶應義塾大学 栗田 治 KURITA Osamu

## 1. はじめに

都市内領域の道路延長は、都市計画を立案するための重要な情報を与える。道路の多寡は交通環境や住環境に大きな影響を及ぼすからである。しかし、その計測には多大な手間が掛かるから、簡便な推定法が望まれる。こうした問題意識に基づいて、[2,3] は次の近似公式を提案した：

$$\text{[腰塚の推定式]} \quad \hat{\Lambda} = \left(1 - \frac{n_3}{4n}\right) \sqrt{n\pi S}. \quad (1)$$

ただし、 $\hat{\Lambda}$  は凸領域内の道路延長  $\Lambda$  の推定値を意味し、 $S$  は領域面積、 $n$  は領域内の交差点数、 $n_3$  は 3 差路数である。この推定式は、道路網をランダムな直線の実現値と見做し、積分幾何学における Crofton の公式に基づいて演繹的に導かれたものである (不偏推定ではない)。領域内の交差点数さえ分かればよいのだから実に簡便である。しかし、凸領域を対象として導かれており、凸でない領域への適用の可能性が明示されていないことが残念である。

本研究は、[5] の thickness 関数を導入することによって、(1) が領域が凸でなくても (また連結でなくても) 有効であることを理論的に明示する。さらに推定精度の実証分析を行った結果を述べるものである。

## 2. ランダムな直線 $G$ の記述

平面上に極座標系  $p-\theta$  を導入する。そして、任意の直線  $G$  の位置を、原点から  $G$  に下した垂線の長さ  $p$ 、その垂線が基準線となす角度  $\theta$ 、の対  $(p, \theta)$  で一意に表現する (図 1)。ここで、(1)  $\theta$  が  $[0, \pi]$  の一様分布、(2)  $p$  の頻度は角度  $\theta$  の直線上で一定、が成立するとき、この確率システムが生成する直線をランダムな直線と呼ぶ。領域に交わる直線の集合の測度に着目するとき、このシステムが等長変換に関して不変な測度を与えることの証明が [1] や [4] で紹介されている。直線群に、平面上での“濃い薄い”がないのである。

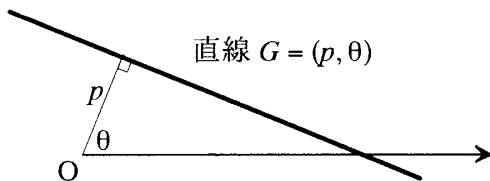


図 1  $p-\theta$  平面における直線の記述。

## 3. ランダムな直線 $G$ が領域 $K$ に切り取られる弦の長さ $l$ の期待値 — thickness 関数の導入 —

[5] に基づき記述する。平面上に任意の閉領域  $K$  (連結でなくともよい) を与え、函数

$$T(\theta) = \text{[座標原点を通る角度 } \theta \text{ の直線に } K \text{ を投影したときの長さ]} \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \quad (2)$$

を定義する。  $T(\theta)$  を「領域  $K$  の  $\theta$  方向の thickness」と呼ぶ<sup>1</sup> (図 2)。定義により、  $T(\theta)$  を  $[0, \pi]$  で積分すると領域  $K$  に交わる直線の集合の測度  $T^*$  が得られる：

$$T^* = \int_0^\pi T(\theta) d\theta. \quad (3)$$

$l(p, \theta)$  を、  $K$  に交わる直線  $G = (p, \theta)$  が作る弦の長さとする、期待値は次の通り<sup>2</sup> (計算過程は割愛)：

$$\langle l \rangle = \frac{1}{T^*} \int_{G \cap K} l(p, \theta) dp d\theta = \frac{\pi S}{T^*}. \quad (4)$$

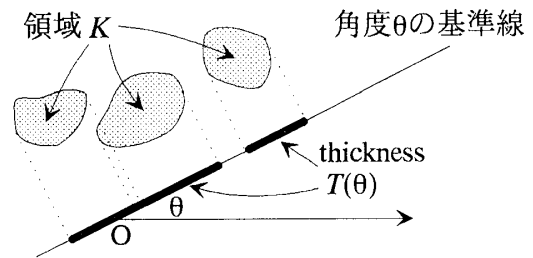


図 2 領域  $K$  の  $\theta$  方向の thickness  $T(\theta)$ 。

## 4. 領域 $K$ 内の弦の総延長 $\Lambda$ を推定する公式

まずは、領域  $K$  に  $m$  本の直線が交わる時の、直線同士が  $K$  内に持つ交点の数  $n$  の期待値を導出したい。  $m$  本の中の任意の 2 本が  $K$  内で交わる確率  $p_K$  は

$$p_K = \int_{G \cap K} \frac{2l(p, \theta)}{T^*} \cdot \frac{dp d\theta}{T^*} = \frac{2\pi S}{T^{*2}} \quad (5)$$

である。上式は、[1,4] 他によって周知の Crofton の公式と、前節の thickness 関数の両者に基づいて導いた

<sup>1</sup> 直線  $G$  を  $(p, \theta)$  で表すとき、  $p$  が  $T(\theta)$  に対応する区間に実現値を持てば  $G$  が領域  $K$  に交わる。  $T(\theta)$  は “ $\theta$  を固定したときの  $K$  に交わる直線の集合の測度” なのである。

<sup>2</sup> もしも領域  $K$  が連結なら  $T^*$  は領域  $K$  の凸包の周長  $L^*$  に一致する ( $\because$  Crofton の公式)。このとき  $\langle l \rangle = \pi S / L^*$ 。

(導出過程は割愛). ここで全ての相異なる直線ペアに関して  $1 \times p_K$  を加えれば交点数の期待値が得られる:

$$\langle n \rangle = \binom{m}{2} p_K = m(m-1) \frac{\pi S}{T^*} \quad (6)$$

次に, 交点数  $n$  の実現値に基づき, 領域に交わる直線の本数の推定値  $\hat{m}$  を作成したい. そのために (6) の  $\langle n \rangle$  を  $n$  で置き換えた上で,  $m$  について解くと

$$\hat{m} = \frac{1}{2} + T^* \sqrt{\frac{n}{\pi S} \sqrt{1 + \frac{\pi S}{4nT^{*2}}}} \quad (7)$$

を得る. これに (4) の弦の長さの期待値を乗じて, 弦の総延長を推定しよう:

$$\begin{aligned} \Lambda \sim \hat{m} \langle l \rangle &= \frac{\pi S}{2T^*} + \sqrt{n\pi S} \sqrt{1 + \frac{\pi S}{4nT^{*2}}} \\ &= \frac{\langle l \rangle}{2} + \sqrt{n\pi S} + O(1/\sqrt{n}) \quad (8) \end{aligned}$$

第1項は  $n$  に無関係な定数だから除去. 第3項以降は  $n$  が大なるものとして除去. こうして次を得る:

$$\Lambda \sim \sqrt{n\pi S} \quad (9)$$

[1] は Crofton の公式から (9) を導き, 凸領域に限定した推定公式と位置付けた. しかし, 実は任意の領域 (連結でなくてさえよい!) に適用できるのである.

### 5. 都市内領域 $K$ 内の道路延長 $\Lambda$ を推定する公式

[2,3] は, 都市内領域の道路をランダムな直線の実現値と見做し, 交差点数  $n$  を計測して (9) によって道路延長を推定する, というアイデアを打ち出した. ただし, 道路網に存在する 3 差路は, ランダムな直線の実現値からリンク (隣り合う交点間の線分) が除去されて生ずるものとし, 3 差路 1 つについて平均リンク長の 2 分の 1 を減ずるという操作を施している. こうして作成された推定式が, 冒頭の (1) である.

本研究では, thickness と Crofton の公式を併せ用いて [2,3] と同等の操作を行った. いま領域に  $m$  本の直線が交わるものとして平均リンク長を算出すると  $T^*/\{2(m-1)\}$  である. (詳述はしないが) 領域が凸でなくても,  $m$  が大きい場合は, 3 差路 1 つについて平均リンク長の 2 分の 1 を減ずればよいという理屈が成り立つ. こうして, 道路延長  $\Lambda$  が推定される:

$$\begin{aligned} \Lambda \sim \hat{m} \langle l \rangle &\sim n_3 \times \frac{T^*}{2(\hat{m}-1)} \times \frac{1}{2} \\ &= \left(1 - \frac{n_3}{4n}\right) \left[ \frac{\pi S}{2T^*} + \sqrt{n\pi S} \sqrt{1 + \frac{\pi S}{4nT^{*2}}} \right] \quad (10) \end{aligned}$$

(8) から (9) を作ったのと同様の理屈で次式を得る:

$$\Lambda \sim \left(1 - \frac{n_3}{4n}\right) \sqrt{n\pi S} \quad (11)$$

これは腰塚の推定式 (1) そのものである. このように, (1) が任意の領域 (連結でなくてさえよい!) に対して有効であろうことが明示された.

### 6. 推定精度の実証分析

まず国土地理院発行の 1 万分の 1 地形図「自由が丘」の中に東西 2.5km, 南北 4km の矩形部分を選定した. この部分に 500m 四方の正方形が  $5 \times 8 = 40$  個だけ含まれる. この正方形ごとに, 交差点数  $n$ , 3 差路数  $n_3$  ならびに幅員 2.5m 以上の道路の延長  $\Lambda$  を計測した.

ここでは, 図 3 の如く正方形 5 個からなる L 字型の領域  $K$  を構成し, 公式 (1) の推定精度を観察しよう.  $K$  の 90 度毎の回転を考慮すると,  $5 \times 8$  のメッシュの中に 72 個の L 字型が構成される. 横軸を腰塚の推定値  $\hat{\Lambda}$ , 縦軸を実測値  $\Lambda$  として結果をプロットした (図 4). 図 4 に見られる  $\hat{\Lambda}$  の過小推定の傾向は, [2,3] が矩形領域について実証したのと同様である. また, 相対推定誤差の絶対値を計算すると, 最大値 10.28%, 最小値 0.35%, 平均値 5.25% となった. この結果も, [2,3] が矩形領域に関して実証した推定の良さと同様である.

因みに (10) を用いた推定も可能である. そのためには図 3 の通り  $T^* = (\text{凸包の周長}) = 4 + \sqrt{2}$  km とすればよい. このときの相対推定誤差の絶対値の様子は次の通り: 最大値 8.46%, 最小値 0.23%, 平均値 4.43%. これを見ると, (10) の推定式が腰塚の推定式よりも若干優れていることが分かる. (1) ほどの簡便さはないものの, (10) を用いた  $\Lambda$  の推定も推奨できる.

thickness :

$$T^* = (\text{凸包の周長}) = 4 + \sqrt{2} \text{ km}$$

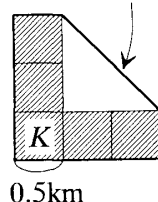


図 3 L 字型領域  $K$ .

実測値  $\Lambda$  [km]

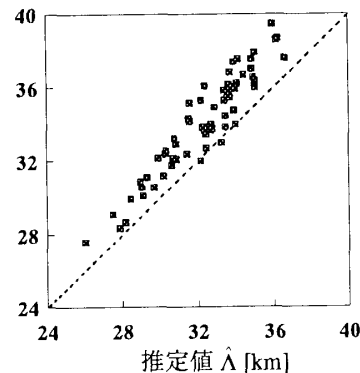


図 4 推定値  $\hat{\Lambda}$  と実測値  $\Lambda$ .

### 謝辞

積分幾何学を紹介して下さった筑波大学社会学系腰塚武志先生, ならびにご意見を下さった慶應義塾大学理工学部の柳井 浩先生に深く感謝致します.

### 7. 参考文献

- [1] 腰塚武志 (1976): 積分幾何学について (1)~(4), オペレーションズ・リサーチ, Vol.21, pp.524-529, pp.591-596, pp.654-659, pp.711-717.
- [2] 腰塚武志 (1977): 都市平面の基礎的研究, 東京大学工学部都市工学科博士論文.
- [3] 腰塚武志 (1978): 道路網と交差点, 都市計画, 103 号, pp.36-41.
- [4] Santaló, L.A. (1976): *Integral Geometry and Geometric Probability*, Addison-Wesley Publishing Company.
- [5] Solomon, H. (1978): *Geometric Probability*, Society for Industrial and Applied Mathematics.