1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

離散時間モデルによる経路依存型オプションの価格の上・下界評価

大阪大学 経済学部　大西 匡光 (Masamitsu OHNISHI)

1　はじめに

本稿で扱う経路依存型オプションとは, オプションの満期時において, その発行時からの原資産の価格過程の経路に依存した行使価格で原資産を買う (コール), あるいは売る (プット) オプションのことである. 本稿ではそうしたオプションのある広いクラスに属するものに対し, 離散時間モデルを用いて, それらの価格の上・下界の評価をするための統一的なアプローチを試みる.

2　モデルと仮定

本稿ではオプションの発行時から満期時までを T 期間 ($T \in \mathcal{N}_{++} := \{1, 2, \cdots\}$) に分割した離散時間モデルを考える. 原資産の価格過程としては, 第 t 期のときの価格を $s_t\ (>0)$ としたとき, それまで過去の経路 (あるいは履歴) $h_t := (s_0, s_1, \cdots, s_t)$ に依存した確率 $p_j(h_t, t)\ (>0)$ で第 $t+1$ 期には $s_{t+1} = s_t u_j\ (j = 1, 2, \cdots, n)$ となる確率過程を考える. 第 t 期における原資産の収益率 (+1) を v_t と定義すれば, $h_t = (h_{t-1}, s_t) = (h_{t-1}, s_{t-1}v_t)$ と表すこともできる. また第 t 期までの可能な経路 h_t のすべてからなる集合を $H_t\ (\subset \mathcal{R}_{++}^{t+1})$ で表す. 一般性を失うことなく, $u_1 < u_2 < \cdots < u_n$ と仮定する.

本稿で扱う経路依存型オプションとは, オプションの満期時 T において, その発行時からの原資産の価格過程の経路 h_T に依存した行使価格 $K(h_T, T)$ で原資産を買う (コール), あるいは売る (プット) 権利のことである. ここで関数 K は, すべての正整数 $T \in \mathcal{N}_{++}$ に対して定義されるものとする, すなわち $K : \bigcup_{T\in\mathcal{N}_{++}} \{(h_T, T) : h_T \in H_T\} \longrightarrow \mathcal{R}_+$.

本稿では, 紙面の都合上, ヨーロッパ型のコール・オプションの価格の評価のみを行う.

仮定 2.1

A1　市場に裁定機会は存在しない.

A2　オプションの発行時から満期時までの間に原資産の配当はなく, その売買の取引きに手数料あるい税金はかからない.

A3　無危険資産が存在し, その利子率は既知で, オプションの発行時から満期時まで一定である (便宜上 $R :=$ [無危険資産の利子率] + 1 と定義する). □

仮定 A1 より, 原資産の収益率と無危険資産の利子率の間には $u_1 < R < u_n$ なる関係式が成立する.

3　経路依存型コール・オプション

行使価格を規定する関数 K の形により, 様々な経路依存型コール・オプションを定義することができる.

例 3.1 (経路依存型コール・オプション)

ルックバック・オプション:

$$K^{\mathrm{LBC}}(h_T, T) := \min\{s_t : t = 0, 1, \cdots, T\}, \quad (3.1)$$

平均オプション:

算術平均オプション:

$$K^{\mathrm{AA}}(h_T, T) := \frac{1}{T+1}\sum_{t=0}^{T} s_t, \quad (3.2)$$

幾何平均オプション:

$$K^{\mathrm{GA}}(h_T, T) := \left\{\prod_{t=0}^{T} s_t\right\}^{\frac{1}{T+1}}. \quad (3.3)$$

□

$C(h_t, t)$: 満期時を $T \in \mathcal{N}_{++}$ とし, 第 t 期において, 原資産の価格過程の経路を h_t としたときのコール・オプションの価格

と定義する. $t = T$, すなわちオプションの満期時においては次式が成り立つ:

$$C(h_T, T) = [s_T - K(h_T, T)]_+, \quad (3.4)$$

ただし, 実数 a に対し, $[a]_+ = \max\{0, a\}$ と定義する.

仮定 3.1

C1　$K(h_T, T) = K((h_{T-1}, s_T), T)$ は s_T の凹関数.

C2　すべての正整数 (の満期) $T \in \mathcal{N}_{++}$ に対し, ある関数 $A : \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}_{++} \times \mathcal{N}_{++} \longrightarrow \mathcal{R}_+$ を含む次の再帰的な関係式を満足する:

$$\frac{K(h_T, T)}{s_T} = A\left(\frac{K(h_{T-1}, T-1)}{s_{T-1}}, v_T, T\right). \quad (3.5)$$

C3　仮定 C2 の関数 $A(k_{T-1}, v_T, T)$ は k_{T-1} に関して単調非減少かつ凹である. □

例 3.1 で挙げたコール・オプションはいずれも仮定 C1, C2, C3 を満たしている.

3.1 残り 1 期間問題

満期時 T まで残り 1 期間の場合を考え, それまでの原資産の価格過程の経路を $h_{T-1}=(s_0,s_1,\cdots,s_{T-1})$ とする. この条件のもとで, 原資産の価格が満期時 T に $s_T=s_{T-1}u_j$, $j=1,2,\cdots,n$ になることを"状態 j が起こる" と言い, 状態 j が起こったとき, そしてそのときに限り, 1 単位の配当を受ける Arrow–Debreu 証券の現在の価格 (状態価格) を e_j とする. 仮定 A1, A3 より, 無危険資産に関して, 次の関係式が成り立つ:

$$\sum_{j=1}^{n} e_j = R^{-1} \tag{3.6}$$

また原資産の価格に関しては, やはり仮定 A1 より,

$$\sum_{j=1}^{n} u_j e_j = 1 \tag{3.7}$$

が成立する. 同様にコール・オプションの価格に関しても次式が成立する:

$$C(h_{T-1},T-1)=\sum_{j=1}^{n} C((h_{T-1},s_{T-1}u_j),T)e_j \tag{3.8}$$

$q_j:=Re_j$, $j=1,2,\cdots,n$ はリスク中立確率とも解釈される. e_j, $j=1,2,\cdots,n$ のすべての値が求まれば, 上式 (3.8) より $C(h_{T-1},T-1)$ の値は定まるが, 情報としては, 無危険資産の利子率 R (-1) および原資産の価格過程の経路 h_{T-1} のみが与えられているものとする. したがってコール・オプションの価格の上・下界は, e_j, $j=1,2,\cdots,n$ を決定変数とし, 式 (3.6), (3.7) を同一の制約条件, 共通の目的関数式 (3.8) を最大化・最小化する, 以下のような 2 つの線形計画問題の最大値・最小値として得ることができる.

$$\textbf{LP:}\ \left\{\begin{array}{c}\text{maximize}\\ \text{or}\\ \text{minimize}\end{array}\right\}\quad \sum_{j=1}^{n} C((h_{T-1},s_{T-1}u_j),T)e_j \tag{3.9}$$

$$\text{subject to}\quad \sum_{j=1}^{n} u_j e_j = 1, \tag{3.10}$$

$$\sum_{j=1}^{n} e_j = R^{-1}, \tag{3.11}$$

$$e_j \ge 0,\quad j=1,2,\cdots,n \tag{3.12}$$

定理 3.1 コール・オプションの満期時を $T\in\mathcal{N}_{++}$ とする. 第 $T-1$ 期において, 現資産の価格過程の経路を h_{T-1} とするとき, コール・オプションの価格 $C(h_{T-1},T-1)$ に対する線形計画問題 LP (LPC2) の最大値・最小値によって定まる上・下界をそれぞれ $\overline{C}(h_{T-1},T-1)$, $\underline{C}(h_{T-1},T-1)$ と表すと,

$$\begin{aligned}\overline{C}(h_{T-1},T-1) &= R^{-1}\{\alpha C((h_{T-1},s_{T-1}u_1),T) \\ &\quad +(1-\alpha)C((h_{T-1},s_{T-1}u_n),T)\},\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}\underline{C}(h_{T-1},T-1) &= R^{-1}\{\beta C((h_{T-1},s_{T-1}u_h),T) \\ &\quad +(1-\beta)C((h_{T-1},s_{T-1}u_{h+1}),T)\}\end{aligned} \tag{3.14}$$

が成立する, ただし $\alpha:=(u_n-R)/(u_n-u_1)$ とし, $u_h\le R<u_{h+1}$ である $h\in\{1,2,\cdots,n-1\}$ を用いて $\beta:=(u_{h+1}-R)/(u_{h+1}-u_h)$ とする. □

3.2 残り多期間問題

残り 1 期間問題と同様の考え方により, ある $e=(e_1,e_2,\cdots,e_n)\in E$ に対して,

$$C(h_t,t)=\sum_{j=1}^{n} C((h_t,s_tu_j),t+1)e_j \tag{3.15}$$

が成立する. ただし, E は 制約条件式(3.10), (3.11), (3.12) を満たす $e=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ 全体の集合と定義される. しかしながら, $C((h_t,s_tu_j),t+1)$ は求められておらず, かわりに上界 $\overline{C}((h_t,s_tu_j),t+1)$ と下界 $\underline{C}((h_t,s_tu_j),t+1)$ のみが与えられているから,

$$\overline{C}(h_T,T) := C(h_T,T), \tag{3.16}$$

$$\overline{C}(h_t,t) := \max_{e\in E}\sum_{j=1}^{n}\overline{C}((h_t,s_tu_j),t+1)e_j \tag{3.17}$$

$$\underline{C}(h_T,T) := C(h_T,T), \tag{3.18}$$

$$\underline{C}(h_t,t) := \min_{e\in E}\sum_{j=1}^{n}\underline{C}((h_t,s_tu_j),t+1)e_j \tag{3.19}$$

と定義すれば, これらは $C(h_t,t)$ の上・下界を与える.

定理 3.2 コール・オプションの満期時を $T\in\mathcal{N}_{++}$ とする. 第 t 期において現資産の価格過程の経路を h_t とするとき, 式 (3.16), (3.17) および式 (3.18), (3.19) で定義されるコール・オプションの価格 の上・下界 $\overline{C}(h_t,t)$, $\underline{C}(h_t,t)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}\overline{C}(h_t,t) &= R^{-1}\{\alpha\overline{C}((h_t,s_tu_1),t+1) \\ &\quad +(1-\alpha)\overline{C}((h_t,s_tu_n),t+1)\},\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}\underline{C}(h_t,t) &= R^{-1}\{\beta\underline{C}((h_t,s_tu_h),t+1) \\ &\quad +(1-\beta)\underline{C}((h_t,s_tu_{h+1}),t+1)\}\end{aligned} \tag{3.21}$$

を満たす. さらに k_t に関して単調非増加で凸なある関数 $\overline{c}(k_t,t)$, $\underline{c}(k_t,t)$ を用いて,

$$\frac{\overline{C}(h_t,t)}{s_t} = \overline{c}\left(\frac{K(h_t,t)}{s_t},t\right), \tag{3.22}$$

$$\frac{\underline{C}(h_t,t)}{s_t} = \underline{c}\left(\frac{K(h_t,t)}{s_t},t\right) \tag{3.23}$$

と書き表すことができる. □

この定理によれば, 原資産の価格過程として, 第 t 期のときの価格を s_t (>0) としたとき, それまでの過去の経路 h_{t-1} に依存せず, それぞれ確率 α, $1-\alpha$ $(\beta$, $1-\beta)$ で次期, 第 $t+1$ 期には価格 $s_{t+1}=s_tu_1$, s_tu_n $(s_{t+1}=s_tu_h$, $s_tu_{h+1})$ となる 2 項過程を考えて, その価格過程のもとでのコール・オプションの価格をを評価すれば, 元の価格過程での価格の上界 (下界) を与える. したがって, いま $\overline{Q}(h_T|h_t)$ $(\underline{Q}(h_T|h_t))$ により, それぞれ上記の 2 項過程のもとで, 第 t 期における過去の価格過程の経路が h_t であったという条件のもとで, 満期時 T までの経路 h_T がとなる確率を表すことにすれば, 次の定理が成り立つ.

定理 3. 3

$$\overline{C}(h_t,t) = R^{-(T-t)}\sum_{h_T\in H_T}\overline{Q}(h_T|h_t)C(h_T,T) \tag{3.24}$$

$$\underline{C}(h_t,t) = R^{-(T-t)}\sum_{h_T\in H_T}\underline{Q}(h_T|h_t)C(h_T,T) \tag{3.25}$$

□