

HJMモデルに基づくイールド・スプレッド・オプションの評価

ゴールドマン・サックス証券会社 宮崎浩一 (MIYAZAKI, Koichi)
会員番号 01702670 筑波大学 吉田敏弘 (YOSHIDA, Toshihiro)

1 はじめに

本論文では、イールド・スプレッド・オプションの評価モデルを検討する。金利の期間構造のモデルとしてはHJMモデルを基本にし、可能な限り現実的なボラティリティー構造を仮定して、イールド・スプレッド・オプションの価格を解析的に求めることを目的とする。HJMモデルでは、金利のプロセスはボラティリティー構造によって決定される。ボラティリティー構造としては、金利水準と時間の両者に依存させるのが最も一般的であるが、金利水準に依存できるとした場合には、イールド・スプレッド・オプションの価格を解析的に求めることは極めて難しい。本論文では、ボラティリティー構造が時間にのみ依存するものとし、金利のプロセスにおけるファクターを増やすことにより、現実的な金利プロセスを表現する。

2 イールド・スプレッド・オプションの評価モデル

2.1 金利の期間構造モデル

・ 定数ボラティリティーモデル

$$df = \mu(\cdot)dt + \sigma_1 dz_1(t)$$

・ 指数ダイケイボラティリティーモデル

$$df = \mu(\cdot)dt + \sigma_1 e^{-a(T-t)} dz_1(t)$$

・ 2 Factorモデル

$$df = \mu(\cdot)dt + \sigma_1 dz_1(t) + \sigma_2 e^{-a(T-t)} dz_2(t)$$

・ 3 Factorモデル

$$df = \mu(\cdot)dt + \sigma_1 dz_1(t) + \sigma_2 e^{-a(T-t)} dz_2(t) + \sigma_3 e^{-b(T-t)^2} dz_3(t)$$

現実のフォワード・レートのボラティリティー構造は、(1) 2年以下の満期の短いところでは極めて高く7年にかけて急速に低下していくこと、(2) 12年を中心とする山の存在することが確認される。定数ボラティリティーモデルを用いる場合は当然であるが、既存の指数ダイケイボラティリティーモデルや2 Factorモデルを用いても、12年を中心とする山を捉えることが出来ないため、2年以下の満期の短いところでは極めて高く7年にかけて急速に低下していく構造も十分にトラッキングすることが出来ない。このように従来の金利プロセス

モデルでは、日本国債の期間構造を捉えることができない。そこで第3のファクターを導入し3 Factorモデルにすることによって、従来のモデルの弱点を補い現実的な金利プロセスの表現が可能となる。

2.2 イールド・スプレッド・オプションの評価モデル

ここでは、2 Factorモデルに基づくイールド・スプレッド・オプションの評価を示し、紙面の都合上発表当日3 Factorモデルに基づく場合の評価式も合わせて提示する。イールド・スプレッド・オプションの評価においては、まず、イールドのプロセスをリスク・中立測度からフォワード・リスク・アジャステッド測度に変換し、この測度下での期待値を取る。フォワード・リスク・アジャステッド測度に変換後のTイールドのプロセスは次のように表される。

$$Y(T^*, T^* + T) = \frac{1}{T} \int_0^T f(0, s) ds + \frac{\sigma_1^2 T^* T}{2} + \frac{\sigma_2^2}{4a^3 T} (1 - e^{-2aT}) (1 - e^{-aT}) (3 + e^{-aT}) + \sigma_1 z_1^T(T^*) + \frac{\sigma_2}{aT} e^{-aT} (1 - e^{-aT}) \int_0^T e^{av} dz_2^T(v)$$

ここで、Tは、T残存期間を、 T^* はオプションの満期を表す。

これより、Tイールドは、以下の平均、分散を持つ正規分布に従うことがわかる。

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(0, s) ds + \frac{\sigma_1^2 T^* T}{2} + \frac{\sigma_2^2}{4a^3 T} (1 - e^{-2aT}) (1 - e^{-aT}) (3 + e^{-aT})$$

$$\text{分散 } \sigma_1^2 T^* + \frac{\sigma_2^2}{2a^3 T^2} (1 - e^{-aT})^2 (1 - e^{-2aT})$$

満期 T_1 のイールドと満期 T_2 のイールドとのイールド・スプレッド・オプションの評価をする際に必要となるのは、オプションの満期 T^* における、満期 T_1 のイールドと満期 T_2 のイールドとのイールド・スプレッドの分布である。先に示したようにイールドのプロセスは正規分布に従うため、正規分布の再生性からイールド・スプレッドの分布も正規分布となる。よって、イールド・スプレッドの分布は、 $N(\mu_1 - \mu_2, \Sigma_1^2 + \Sigma_2^2)$ に従う。ここで、 μ_i 、 Σ_i^2 は、それぞれ満期 T_i のイールドの平均と分散である。結局、イールド・スプレッド・オプションの評価式は、

$$C^*(0) = P(0, T^*) \left\{ (\mu - K) \left[1 - \Phi \left(\frac{K - \mu}{\sigma} \right) \right] + \sigma \Phi \left(\frac{K - \mu}{\sigma} \right) \right\}$$

となる。ここで、 $P(0, T^*)$ 満期 T^* の割引債の価格、Kは行使スプレッド、 μ 、 σ はそれぞれイールド・スプレッドの分布の平均・分散を表す。

3 実証分析

3.1 パラメータ推定

2.1でまとめた4つの金利期間構造モデルに基づいて現実のフォワード・レートの変動率構造から推定したパラメータとその誤差をテーブル1にまとめ、さらにグラフ1には、モデルに基づくフォワード・レートの変動率構造と現実の変動率構造を合わせて示した。パラメータの推定に際しては、95年11月から96年11月のデータを用い、データの信頼性の観点から2年から15年までを用いた。

テーブル1

	定数	指数ディケイ	2 Factor	3 Factor
σ_1	1.25E-4	1.85E-4	7.63E-5	2.66E-5
σ_2	0	0	1.87E-4	2.22E-4
σ_3	0	0	0	1.02E-4
a	0	5.46E-2	9.83E-2	1.14E-1
b	0	0	0	7.3E-2
ρ	0	0	0	12.11
残差	1.70E-17	4.61E-18	2.97E-18	3.25E-19

3.2 各種モデルによるイールド・ボラティリティーの比較

グラフ2には、各モデルに基づいて、イールドの年数毎にボラティリティー（分散ベースで表示）を示した。7年未満のセクターでは、3Factorモデルに基づいて求めたイールド・ボラティリティーが最も高いが、年数が増すに従って次第に、指数ディケイモデルや2Factorモデルによるイールド・ボラティリティーが高くなること、最も年数の長い20年では、定数ボラティリティーモデルによるものが最もイールド・ボラティリティーが高くなることわかる。

3.3 各種モデルによるオプション価格の比較

2年-7年のイールド・スプレッド・オプションと10年-15年のイールド・スプレッド・オプションのプレミアムを各種モデルから求めテーブル2にまとめた。ここでは、満期6ヶ月、アット・ザ・マネー・フォワードのコール・オプションを取り上げた。各モデルのフォワード・イールド・スプレッドの違いは極僅かであるため、行使スプレッドは、各モデルのフォワード・イールド・スプレッドとした。

テーブル2

	1 Factor		2 Factor	3 Factor
	定数	指数ディケイ		
2-7	4.98E-5	6.46E-5	6.70E-5	6.95E-5
10-15	4.99E-5	5.29E-5	5.22E-5	4.90E-5

テーブル2によると、2年-7年のイールド・スプレッ

ド・オプションでは、定数ボラティリティーを用いた場合のプレミアムが最も小さく、3 Factorモデルによる場合が最も大きい。10年-15年のイールド・スプレッド・オプションでは、逆に3 Factorモデルによる場合が最も小さく、定数ボラティリティー、2 Factor、指数ディケイ・ボラティリティーの順に大きくなることわかる。これは、2 Factorモデルまでの各種モデルに基づいてイールド・スプレッド・オプションを評価すると、満期の短いセクターでは、低く評価し、満期の長いセクターでは、高く評価することになる。先に述べたように、モデル各々のフォワード・イールド・スプレッドの違いは極僅かであるため、このようなプレミアムの相違は、イールド・ボラティリティーの違いから生じてくるものと考えられる。

4 参考文献

- [1] Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton, "Bond Pricing and the Term Structure of Interest rate. A New Methodology for Contingent Claims Valuation," *Econometrica*, 60, 1992, pp. 77-105.
- [2] Jamshidian, F., "Bond and Option Evaluation in the Gaussian Interest Rate Model," *Research in Finance*, Volume 9, pp. 131-170.
- [3] Longstaff, F.A., "The Valuation of Options on Yields," *Journal of Financial Economics*, 26, 1990, pp. 97-121.

FIG1 FWD Volatility Term Structure

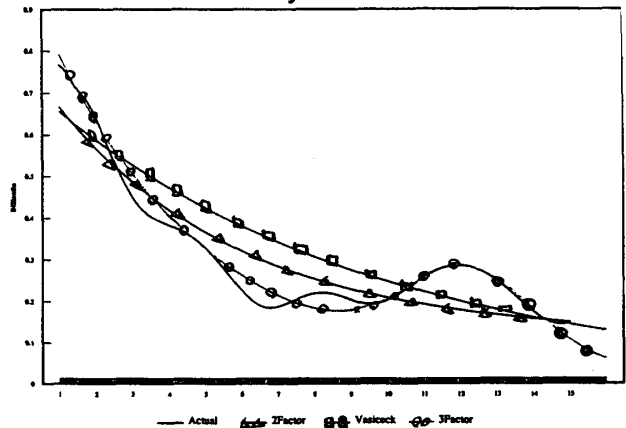


FIG2 Yield Volatility by Models

