

## 推移確率が行列幾何構造をもつ2変数マルコフ連鎖について

非会員 University of Rochester  
01605860 慶應義塾大学KEILSON Julian  
\*増田 靖 MASUDA Yasushi

片側または両側に境界をもち、列に関して「スキップ」がなく斉次的な2変数マルコフ連鎖を考える。このマルコフ連鎖は、その推移率行列をブロックごとにみた時に tri-diagonal になっているという意味で、無限または有限のバッファをもつ M/M/1 待ち行列システムの自然な拡張となっている。この類似性より、本研究で扱うマルコフ連鎖は、M/M/1 システムに見られるさまざまな有用な性質をある程度受け継いでいるであろうと推察される。本研究の動機は、その受け継がれている性質を特定しようということにある。

片側にのみ境界をもつ場合（無限バッファの場合）については、定常確率が行列幾何分布をもつという Neuts の結果 [5, 6] が有名である。Keilson and Zachmann [4] は、Green 関数([1, 2])を用いた議論により、両側に境界がある場合（有限バッファの場合）にも、定常確率が行列幾何構造をもつことを示した。本研究 [3] は、Green 関数を用いた方法に基づいており、その論点は以下によって要約される。

1. 片側または両側に境界がある場合、定常確率だけでなく推移確率も「ある意味で」行列幾何構造をもつ。すなわち、片側（0列目）にのみ境界がある場合は、時間0でシステムが0列目の状態にあるならば、時間  $t$  での  $n$  列目の推移確率ベクトル  $\mathbf{p}_n(t)$  は、

$$\mathbf{p}_n(t) = \int_0^t \mathbf{p}_0(t-x) \mathbf{R}_+^{(n)}(x) dx$$

のように書ける。ここで  $\mathbf{R}_+(x)$  を推移的な rate 行列と呼び、 $\mathbf{R}_+^{(n)}(x)$  は  $\mathbf{R}_+(x)$  の  $n$ -fold convolution である。両側に境界がある場合には、推移確率ベクトルは「上向き」と「下向き」の二つの推移的な rate 行列  $\mathbf{R}_+(x)$  と  $\mathbf{R}_-(x)$  によって書かれる。

2. Neuts による定常分布の行列幾何解と Keilson の Green 関数による方法は、それぞれ独立に考案され、それらの関係は必ずしも明らかではなかった。しかし、本論文で扱うマルコフ連鎖に関しては、Green 関数による方法によって得られる推移的な rate 行列が、行列幾何定常分布を特徴づける定常的な rate 行列に対応することが、解析的に示される。
3. Green 関数法によって得られる推移的な rate 行列は、taboo 確率を通して確率的に解釈することができる。これは、Neuts による方法で、定常的な rate 行列が taboo 確率によって定義されていることに対応している。
4. 上記の結果の意味するところを、特殊な場合（MMPP/M/1 と M/M/1）について考える。

今後の課題としては次の点が考えられる。

1. 本研究で扱ったマルコフ連鎖では、列に関して両方向にスキップをすることがないことが仮定されているが、Neutsの方法は、片側にのみスキップがない場合にも適用できる。Green関数に基づいた方法をこの場合にも適用できるかどうかは、不明である（現在のところ否定的に見える）。
2. Neutsによる方法は、Green関数に基づく方法よりも一般に知られており、応用でもよく用いられているようである。その意味で、Neutsのアプローチを適用して、本研究とKeilson and Zachmann [4]の結果、すなわち両側に境界がある場合における定常・推移確率の行列幾何構造を導くことは意味があると思われる。
3. 定常確率が行列幾何分布となることが、定常確率を数値的に求める際に役立つことは良く知られている。実際、Neutsによる方法は、数値解法を念頭に開発されたと考えても良いかもしれない。推移確率を上記の行列幾何構造を用いて数値的に求めるには、推移的なrate行列 $\mathbf{R}_+(x)$ 、 $\mathbf{R}_-(x)$ と境界上での推移確率 $\mathbf{p}_0(t)$ を数値的に評価する必要があるが、それらを求める実用的な方法の開発は有用であると思われる。

詳細については、[3]を参照されたい。

- [1] Keilson, J. (1965), *Green's Function Methods in Applied Probability Theory*, Griffin, London.
- [2] Keilson, J. (1979), *Markov Chain Models — Exponentiality and Rarity*, Springer-Verlag, New York, NY.
- [3] Keilson, J. and Masuda, Y. (1996), “Transient Probabilities of Homogeneous Row-Continuous Bivariate Markov Chains with One or Two Boundaries,” Faculty of Science and Technology, Keio University; available upon request.
- [4] Keilson, J. and Zachmann, M. (1988), “Homogeneous Row-Continuous Bivariate Markov Chains with Boundaries,” *Journal of Applied Probability*, Special Volume 25A, 237-256.
- [5] Neuts, M. (1978), “Markov Chain with Applications in Queueing Theory Which Have a Matrix Geometric Invariant Vector”, *Advances in Applied Probability*, Vol. 10, 185-212.
- [6] Neuts, M. (1981), *Matrix Geometric Solution in Stochastic Models: An Algorithmic Approach*, John Hopkins University Press, Baltimore, MD.