

## リソースを用いた確率的DEA

01604524 神戸大学 \* 森田 浩 MORITA Hiroshi  
神戸大学 道田 英雄 MICHIDA Hideo  
01501824 神戸大学 藤井 進 FUJII Susumu

### 1. はじめに

入出力データに基づいた効率性分析手法として DEA (Data Envelopment Analysis) が広く用いられるようになった現在、その適用範囲の拡大に伴って、さまざまな拡張が進められている。中でも特に、データに潜在的に存在する不確実性を扱うことの重要性がいわれており (Seiford, 1996)、統計的あるいは確率的な DEA の開発が行われている。これらには、得られたデータよりデータ生成機構を構成して効率性のフロンティアを推定しているブーツストラップ法 (Simar, 1992) や機会制約条件を考えた効率性 (Olesen ら, 1995) さらに、効率性評価の確率的変動に対する信頼性や効率的となる確率などの確率的尺度 (Morita ら) などの研究がある。

本稿ではリソースを持つ確率的計画問題として DEA を定式化し、繰り返しデータをもつ DMU 群の効率性分析への適用を試みる。

### 2. リソースを用いた確率的計画法

確率的データによる効率性分析は確率的線形計画問題により定式化できる。一般に確率的線形計画問題は、 $A(\omega), b(\omega), c(\omega)$  は確率変数、 $T, h$  は確定的な係数とするとき、

$$\text{SLP} \begin{cases} \text{Minimize} & c(\omega)'x \\ \text{subject to} & A(\omega)x = b(\omega), \\ & Tx = h, x \geq 0 \end{cases}$$

と表される。確率変数を含んだ制約条件は成立するかどうかとも確率的となり、制約条件の成立に関する考え方の違いにより機会制約条件モデル (chance constrained model) とリソースモデル (recourse model) に分けられる。前者は制約条件が満足される確率をある確率レベル  $\alpha$  以上にしようというもので、確率的な制約条件を

$$\Pr(A(\omega)x = b(\omega)) \geq \alpha$$

と置き換える。後者は制約条件から逸脱した量をペナルティとして課するというもので、一般にリソースは、逸

脱量を  $W(\omega)z = A(\omega)x - b(\omega)$  とおくときの損失  $q(\omega)z$  が最小となるように決められる。

$$Q(x, \omega) = \inf_{z \geq 0} \{q(\omega)'z \mid W(\omega)z = A(\omega)x - b(\omega)\}$$

この  $Q(x, \omega)$  の期待値  $Q(x)$  はリソースコストと呼ばれ、ペナルティとして目的関数に課される。

目的関数にある確率変数にも、その期待値を取ったり、分散も加味した定式化を行ったりするなど、いろいろな定式化が考えられているが、本応用では目的関数には確率変数が含まれない計画問題となるので、詳細は省略する。

ここでは、リソースのある確率計画問題として

$$\text{R} \begin{cases} \text{Minimize} & c'x + Q(x) \\ \text{subject to} & Tx = h, x \geq 0 \end{cases}$$

を考えることにする。ただし、 $Q(x)$  は

$$Q(x, \omega) = \inf_{z \geq 0} \{q'z \mid [I, -I]z = A(\omega)x - b(\omega)\}$$

から求めている。

### 3. L型法

リソース問題における確率要素が離散的な場合には L 型法 (L-shaped method) と呼ばれる効率的な解法が提案されている。確率変数  $A(\omega), b(\omega)$  が L 種類の離散的な値  $\{(A^1, b^1), (A^2, b^2), \dots, (A^L, b^L)\}$  を取り、それぞれの実現する確率を  $\{p_1, p_2, \dots, p_L\}$  とする。このとき、リソースコスト  $Q(x)$  は

$$Q(x) = \sum_{l=1}^L p_l Q(x, \omega^l)$$

と与えられる。ただし、

$$Q(x, \omega^l) = \inf_{z_+, z_- \geq 0} \{q_+ z_+ + q_- z_- \mid z_+ - z_- = A^l x - b^l\} \quad / 2$$

である。

L型法による解法は、2種類のカット (feasibility cut と optimality cut) を順次加えていく切除平面法であり、有限回の繰り返しの後、最適解が得られることが証明されている。アルゴリズムの詳細は (Birge ら, 1997) を参照されたい。

#### 4. 繰り返しデータによる効率性分析

不確実性のあるデータを用いて効率性分析をする場合を考えよう。1回限りの測定値からデータのばらつきを推定することは困難である。ばらつきの大きさを見るには、データを繰り返し測定することが有効である。測定を複数回行ったと考えるても良いが、7日分のデータを週当たりのデータとする場合は、7回の繰り返しデータと見ることでもできる。

今、不確実性のある入出力項目に関して L 回観測を行ったとしよう。これらを確率的変動を含んだ入出力項目の L 個の実現値であると考えよう。つまり、入出力の値を観測値  $(X^l, Y^l)$ ,  $l = 1, \dots, L$  が確率  $p_l = 1/L$  で生じる離散的確率変数とみなす。もしこの入出力項目が何らかの確率分布に従う確率変数であるとすれば、これらの観測値はその確率分布に従う L 個の無作為標本であるとも考えられる。

リコースを用いた効率性分析のための DEA の定式化を以下に示すが、ここでは簡単のため、入力 X が確率的、出力 Y は確定的としている。実際には、入出力に確率的なものや確定的なものが混在しても構わない。出力指向型 CCR モデルの双対形式で考えている。リコースコスト  $Q(\theta, \lambda, s_x)$  は

$$Q(\theta, \lambda, s_x, \omega^l) = \inf_{z_+, z_- \geq 0} \{z_+ + z_- \mid z_+ - z_- = \theta X_o^l - X^l \lambda - s_x\}$$

の平均値

$$Q(\theta, \lambda, s_x) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L Q(\theta, \lambda, s_x, \omega^l)$$

となる。よって、リコースをもつ DEA モデルは

R-CCR-D

$$\begin{cases} \text{Minimize} & \theta + rQ(\theta, \lambda, s_x) - \epsilon(s_x + s_y) \\ \text{subject to} & Y_o - Y\lambda + s_y = 0 \\ & \theta \geq 0, \lambda \geq 0, s_x \geq 0, s_y \geq 0 \end{cases}$$

となる。ここで、r はリコースコストにかかる係数で、この値はリコースに相当する変数が基底に選ばれるように適切に与えなければならない。

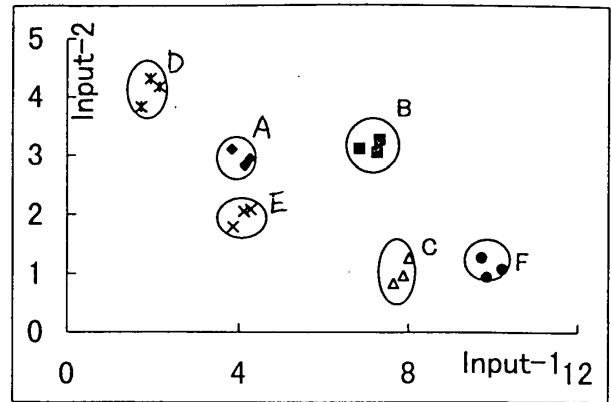


図 1: 繰り返しデータをもつ DMU 群

表 1. 効率値とリコースコスト

|                        | A     | B     | C | D | E | F     |
|------------------------|-------|-------|---|---|---|-------|
| $\theta^{\text{リコース}}$ | .852  | .598  | 1 | 1 | 1 | .815  |
| Q                      | .0265 | .0685 | — | — | — | .1380 |
| $\theta^{\text{平均}}$   | .857  | .632  | 1 | 1 | 1 | 1     |

#### 5. 簡単な数値例

2つの入力と1つの単位出力をもつ5つの DMU 群を考え、それぞれ3回繰り返し観測し、図1のようになったとする。このときの各 DMU の効率値  $\theta^{\text{リコース}}$  とリコースコストは表1のようになった。3つの観測値の平均値によって求めた効率値  $\theta^{\text{平均}}$  と比べると、リコースを考えたときの効率値は何れも小さくなっている。これはばらつきを考慮に入れたため、平均値による効率値は過大評価になってしまうことにも対応している。この他の結果は紙面の都合上省略する。

#### 参考文献

- Birge, J. and F. Louveaux (1997), "Introduction to stochastic programming", Springer.
- Morita, H. and L. M. Seiford, "Characteristics on Stochastic Efficiency — Reliability and Probability being efficient —", (to be submitted)
- Olesen, O. B. and N. C. Petersen (1995), "Chance Constrained Efficiency Evaluation", Management Science, Vol. 41, pp. 442-457.
- Seiford, L. M. (1996), "Data envelopment analysis: The evolution of the state of the art (1978-1995)", Journal of Productivity Analysis, Vol. 7, pp. 99-138.
- Simar, L. (1992) "Estimating efficiencies from frontier models with panel data: A comparison of parametric, non-parametric and semi-parametric methods with bootstrapping", Journal of Productivity Analysis, Vol. 3, pp. 171-191.