

ブロックノルムを用いた配置問題とその応用

02102053 金沢学院大学 *金 正道 KON Masamichi
01101363 金沢大学 久志本 茂 KUSHIMOTO Shigeru

1 はじめに

本報告では平面における連続型単一施設配置問題であるブロックノルムを用いた minisum 型配置問題 (MSP), minimax 型配置問題 (MMP), multicriteria 型配置問題 (MCP) を考える。MCP は有効点または準有効点を求める問題である。MCP に対する有効点を MSP, MMP の最適解によって特徴付け、MSP のすべての最適解を求める辺追跡アルゴリズムと MCP に対して計算量の意味で最適なすべての有効点を求める階段アルゴリズムとすべての準有効点を求める包装アルゴリズムを提案する。

2 問題の定式化と記号の準備

平面において相異なる需要点 $y_i, i = 1, 2, \dots, n (n \geq 2)$ と各需要点に付随する重み $w_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ とブロックノルム $\|\cdot\|$ が与えられているとする。 Y をすべての需要点の集合とする。このとき MSP, MMP, MCP は次のように定式化される。

$$\text{MSP} \quad \min_{x \in \mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^n w_i \|x - y_i\|$$

$$\text{MMP} \quad \min_{x \in \mathbb{R}^2} \max\{w_i \|x - y_i\| : i = 1, 2, \dots, n\}$$

$$\text{MCP} \quad \min_{x \in \mathbb{R}^2} (\|x - y_1\|, \|x - y_2\|, \dots, \|x - y_n\|)$$

MSP の目的関数を $F(x)$ とおく。点 $x \in \mathbb{R}^2$ が有効点であるとはすべての i に対して $\|y - y_i\| \leq \|x - y_i\|$ でありかつある j に対して $\|y - y_j\| < \|x - y_j\|$ である $y \in \mathbb{R}^2$ が存在しないときをいう。 $x \in \mathbb{R}^2$ が準有効点であるとはすべての i に対して $\|y - y_i\| < \|x - y_i\|$ である $y \in \mathbb{R}^2$ が存在しないときをいう。定義より有効点は準有効点である。

$B \subset \mathbb{R}^2$ を原点を内部に含み原点に関して対称な有界凸多面体とする。 $x \in \mathbb{R}^2$ に対してブロックノルム $\|x\|$ は次のように定義される。

$$\|x\| = \inf\{\mu > 0 : x \in \mu B\}$$

$a \in \mathbb{R}^2$ に対して $a = \|a\|_2 (\cos \alpha, \sin \alpha)$ と表したときの角 $\alpha (0 \leq \alpha < 2\pi)$ を $\angle a$ と書く。ここで $\|\cdot\|_2$

はユークリッドノルムである。 B の端点を x -軸の正方向から反時計回りに $a_j, j = 1, 2, \dots, 2m$ とし各 a_j に対して $\alpha_j = \angle a_j$ とする。以下の説明のため $a_{2m+j} = a_j, \alpha_{2m+j} = 2\pi + \alpha_j, j = 1, 2$ とし、次の記号を用いる。

L_{ij} : 需要点 y_i を通る a_j -方向直線

ℓ_k^j : 直線 $L_{ij}, i = 1, 2, \dots, n$ のうち異なる直線を y -切片を基準に昇順にソートしたときの k 番目の直線 ($\alpha_j = \pi/2$ のときは x -切片を基準)

$s(i, j)$: $L_{ij} = \ell_s^j$ となる添字 s

$(k, j)_{\max} ((k, j)_{\min})$: ℓ_k^j 上の需要点のうち x 座標の値が最大 (最小) な需要点の添字

$\ell_{\max}^j (\ell_{\min}^j)$: 直線 $L_{ij}, i = 1, 2, \dots, n$ のうち y -切片が最大 (最小) な直線

3 有効点の特徴付け

ブロックノルムの性質より MCP に対する有効点を MSP, MMP の最適解で特徴付ける次の 2 つの定理を得る。

定理 1 $x^* \in \mathbb{R}^2$ が MCP に対する有効点であるための必要十分条件はある重み $w_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ に対して x^* が MSP の最適解になることである。

定理 2 MMP の最適解で有効点であるものが存在する。

4 ブロックノルムを用いた MSP

傾きの異なるいくつかの直線 L_{ij} の交点を Y -交点という。凸多面体 $S \subset \mathbb{R}^2$ に対してすべての境界線が L_{ij} のどれかであり、内部が空ではなく内部とすべての L_{ij} との共通部分が空であるとき S を領域という。MSP の最適解について次の 2 つの定理を得る。

定理 3 MSP の最適解で Y -交点であるものが存在する。

定理 4 S_1, S_2 を隣接する有界な領域とする。このとき S_1 の任意の点が MSP の最適解ならば S_2 の内部の任意の点は MSP の最適解ではない。

定理 1 より MSP の最適解は準有効点である。定理 4 より MSP のすべての最適解の集合は 1 点か 1 つの線分か 1 つの領域となるのがわかる。そこで、反復法により準有効点である Y -交点のみをたどり MSP のす

すべての最適解を得る $O(n^3)$ 計算時間必要な辺追跡アルゴリズムを提案する。 r 回の反復後の点を $\mathbf{x}^{(r)}$ とする。 $\mathbf{x}^{(r)}$ を通るすべての直線 L_{ij} の方向に対応する目的関数の右側微係数の最小値を $u^{(r)}$ とする。

辺追跡アルゴリズム

ステップ1 任意の需要点を初期点 $\mathbf{x}^{(r)}$ とし、 $r = 0$ とする。

ステップ2 $u^{(r)} > 0$ なら終了。1 点 $\mathbf{x}^{(r)}$ が最適解である。

ステップ3 $u^{(r)} = 0$ なら終了。 $u^{(r)} = 0$ を満たす \mathbf{a}_k が一意なら $\mathbf{x}^{(r)}$ と $\mathbf{x}^{(r)}$ に隣接する \mathbf{a}_k -方向 Y -交点を結んだ線分上の任意の点が最適解であり、そうでなかったら十分小さい $\varepsilon > 0$ と $u^{(r)} = 0$ を満たす $\mathbf{a}_{k(1)}, \mathbf{a}_{k(2)}$ に対して $\mathbf{x}^{(r)} + \varepsilon(\mathbf{a}_{k(1)} + \mathbf{a}_{k(2)})$ を内部に含む領域上の任意の点が最適解である。

ステップ4 $u^{(r)} < 0$ なら $u^{(r)} = \partial_+ F(\mathbf{x}^{(r)}; \mathbf{a}_k)$ を満たす任意の \mathbf{a}_k を選び $\mathbf{x}^{(r)}$ に隣接する \mathbf{a}_k -方向 Y -交点を $\mathbf{x}^{(r+1)}$ とする。 $r = r + 1$ としステップ2へ。

5 ブロックノルムを用いた MCP

MCP に対するすべての有効点を求める階段アルゴリズムとすべての準有効点を求める包装アルゴリズムを提案する。以下、すべての α_j に対して $\alpha_j \neq \pi/2$ とする。

階段アルゴリズムは多角形であるすべての有効点の集合を境界を構成することによって求める。

$$p(c) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 < \alpha_c < \pi/2 \text{ or } 3\pi/2 < \alpha_c < 5\pi/2 \\ n(c) & \text{if } \pi/2 < \alpha_c < 3\pi/2 \text{ or } 5\pi/2 < \alpha_c < 3\pi \end{cases}$$

$$q(c) = \begin{cases} +1 & \text{if } 0 \leq \alpha_c < \pi/2 \text{ or } 3\pi/2 < \alpha_c < 2\pi \\ -1 & \text{if } \pi/2 < \alpha_c < 3\pi/2 \end{cases}$$

$$\diamond(c) = \begin{cases} \max & \text{if } 0 \leq \alpha_c < \pi/2 \text{ or } 3\pi/2 < \alpha_c < 2\pi \\ \min & \text{if } \pi/2 < \alpha_c < 3\pi/2 \end{cases}$$

とする。

階段アルゴリズム

ステップ0 $\ell_{k, s(i, j)}, (k, j)_{\max}, (k, j)_{\min}$ を求める。ただし $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2m$ であり、各 j に対して $1 \leq k \leq n(j)$ である。

ステップ1 $0 \leq \alpha_1 < \pi/2$ なら $z^* = \mathbf{y}_{(1,1)_{\min}}, r = (1, 1)_{\max}, d = 1$ とする。そうでなかったら $z^* = \mathbf{y}_{(n(1), 1)_{\max}}, r = (n(1), 1)_{\min}, d = n(1)$ とする。 z^* から \mathbf{y}_r までを結ぶルートを記憶する。 $z = \mathbf{y}_r, c = 1$ とする。

ステップ2 $s(r, c+1) = p(c+1)$ なら $d = p(c+1), c = c + 1$ とし Step 2 へ。

ステップ3 $\{p(c+1) - s(r, c+1)\} \{s((d+q(c), c)_{\diamond(c)}, c+1) - s(r, c+1)\} \geq 0$ なら $z' = \mathbf{y}_{(d+q(c), c)_{\diamond(c)}}$ とし Step 4 へ。そうでなかったら $d = d + q(c)$ とし Step 3 へ。

ステップ4 z'' を $\ell_{s(r, c+1)}^{c+1}$ と $\ell_{d+q(c)}^c$ の交点とする。 z から z'' までを結ぶルートを記憶する。 $z' = z^*$ なら終了。そうでなかったら $z = z' (= \mathbf{y}_{(d+q(c), c)_{\diamond(c)}}), r = (d + q(c), c)_{\diamond(c)}, d = d + q(c)$ としステップ2へ。

定理5 階段アルゴリズムは $O(n \log n)$ 計算時間必要であり、計算量の意味で最適である。

包装アルゴリズムは多角形であるすべての準有効点の集合を境界を構成することによって求める。

包装アルゴリズム

ステップ0 $\ell_{\max}^j, \ell_{\min}^j, 1 \leq j \leq 2m + 2$ を求める。

ステップ1 $0 \leq \alpha_1 < \pi/2$ なら $\ell = \ell_{\min}^1$ とし、そうでなかったら $\ell = \ell_{\max}^1$ とする。 $0 < \alpha_2 < \pi/2$ なら $\ell' = \ell_{\min}^2$ とし、そうでなかったら $\ell' = \ell_{\max}^2$ とする。 z を ℓ と ℓ' の交点とし、 $z^* = z, \ell = \ell', c = 2$ とする。

ステップ2 $0 < \alpha_{c+1} < \pi/2$ または $3\pi/2 < \alpha_{c+1} < 5\pi/2$ なら $\ell' = \ell_{\min}^{c+1}$ とし、そうでなかったら $\ell' = \ell_{\max}^{c+1}$ とする。

ステップ3 z' を ℓ と ℓ' の交点とし、 z から z' までを結ぶルートを記憶する。 $z' = z^*$ なら終了。そうでなかったら $z = z', \ell = \ell', c = c + 1$ としステップ2へ。

定理6 包装アルゴリズムは $O(n)$ 計算時間必要であり、計算量の意味で最適である。

6 MCP の商品開発への応用

配置問題の商品開発への応用として既製服市場を考える。いくつかの新商品の候補と消費者の好みを数量化した多変量データを考える。このデータに対して主成分分析を行い第二主成分までを考える。得られた主成分得点に対してブロックノルムを主成分分析によって損失した情報を回帰係数を用いて補うように決定し MCP を考える。新商品の候補が MCP に対する有効点であるかどうかを調べ、有効点でなかったら有効点でありかつ修正コストが最小になるように修正する。

参考文献

- [1] M. Kon, *Efficient Solutions for Multicriteria Location Problem under The Block Norm*, Math. Japonica, 47 (1998), to appear
- [2] M. Kon and S. Kushimoto, *A single facility location problem under the A-distance*, Journal of the Operations Research Soc. of Japan, 40 (1997), 10-20