

## Poisson ジャンプを伴う幾何 Brown 運動の最適停止問題

大西 匡光 (大阪大学 経済学部)

## 1 はじめに

本稿では, Poisson 過程に従い一定の減少率を持つジャンプをする幾何 Brown 運動に対して, 停止時刻における終端報酬の期待割引値を最大化する最適停止問題を議論する. Dixit [1], Dixit and Pindyck [2] の提案した Smooth Pasting の技法が, 最適値関数, 最適停止領域, そして最適停止時刻の導出に有効であることを示す.

## 2 問題の定式化

$\mu, \sigma \geq 0, \xi \in [0, 1]$  を定数として, 確率微分方程式

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t(\mu dt + \sigma dW_t - \xi dN_t), \quad t \in (\mathbb{R}_+) \\ X_0 &= x \in \mathcal{R}_{++} \end{aligned} \quad (2.2)$$

で記述される, ある確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  で定義される  $\mathcal{R}_{++}$  値確率過程  $\mathcal{X} = (X_t; t \in \mathcal{R}_+)$  を考える. ただし,

$W = (W_t; t \in \mathcal{R}_+)$ : 標準 Brown 運動,

$\mathcal{N} = (N_t; t \in \mathcal{R}_+)$ : 強度  $\lambda \geq 0$  の時間斉次な Poisson 過程

であり, それらは互いに確率的に独立であると仮定する. また,  $\xi$  は Poisson 過程の事象時刻におけるジャンプによる状態の減少率を表す定数である.

この状態過程に対し,  $p > 0, q > 0, \beta \geq 0$  を定数として, 終端報酬関数を

$$R(x) := px^\beta - q, \quad x \in \mathcal{R}_{++} \quad (2.3)$$

と定義し, 期待割引報酬を目的関数とする最適停止問題

$$v(x) := \sup_{\tau} E \left[ e^{-\alpha\tau} R(X_\tau) \mid X_0 = x \right], \quad x \in \mathcal{R}_{++} \quad (2.4)$$

を考える. ただし,  $\alpha > 0$  は割引率であり, 式 (2.4) の右辺の  $\sup$  は  $\mathcal{X}$  に対するすべての停止時刻  $\tau$  に関してとられる.

## 3 解析

次の定理は標準的な方法により導出される結果である.

定理 3.1 以下の条件 (1), (2), (3) を満たす 2 回微分可能な関数  $w: \mathcal{R}_{++} \rightarrow \mathcal{R}$  が存在するものとする:

(1) すべての  $x \in \mathcal{R}_{++}$  に対して,

$$[Lw](x) \leq 0, \quad (3.1)$$

ただし, 演算子  $L$  は次式で定義される:

$$\begin{aligned} [Lw](x) &:= -\alpha w(x) + \mu x w'(x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 w''(x) \\ &\quad + \lambda(w((1-\xi)x) - w(x)); \end{aligned} \quad (3.2)$$

(2) すべての  $x \in \mathcal{R}_{++}$  に対して,

$$w(x) \geq R(x); \quad (3.3)$$

(3) すべての  $x \in \mathcal{R}_{++}$  に対して, 不等式 (3.1), (3.3) のいずれか一方は等号で成立する.

このとき,

(i) 関数  $w$  は最適値関数である, すなわち,

$$v(x) = w(x), \quad x \in \mathcal{R}_{++}; \quad (3.4)$$

(ii) 最適停止領域  $S$  と最適停止時刻  $\tau^*$  は以下で与えられる:

$$S := \{x \in \mathcal{R}_{++} : w(x) = R(x)\} \quad (3.5)$$

$$\tau^* := \inf \{t \in \mathcal{R}_+ : X_t \in S\}. \quad (3.6)$$

□

いま、準線形な常微分方程式

$$[Lu](x) = 0, \quad x \in \mathcal{R}_{++} \quad (3.7)$$

を考える。  $a, b$  を定数として、

$$u(x) = ax^b, \quad x \in \mathcal{R}_{++} \quad (3.8)$$

の型の解を想定して、式 (3.7) に代入すると、

$$ag(b)x^b = 0, \quad x \in \mathcal{R}_{++} \quad (3.9)$$

を得る、ただし、関数  $g: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  は

$$g(b) := \frac{1}{2}\sigma^2 b^2 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) b + \lambda \left((1-\xi)^b - 1\right) \quad (3.10)$$

で定義される。さて、方程式  $g(b) = 0$  の持つ異なる 2 根の内の大きい方を  $b^+$  とすると、次の定理を得る。

### 定理 3.2

(1)

$$\mu < \alpha \quad (3.11)$$

と仮定すると、

$$b^+ > 1 \quad (3.12)$$

である。このときさらに

(2)

$$0 \leq \beta < b^+ \quad (3.13)$$

と仮定し、関数  $w: \mathcal{R}_{++} \rightarrow \mathcal{R}$  を

$$w(x) := \begin{cases} a^* x^{b^+}, & 0 < x < x^*, \\ R(x) = px^\beta - q, & x^* \leq x \end{cases} \quad (3.14)$$

と定義すると、関数  $w$  は定理 3.1 の条件 (1), (2), (3) を満たす。ただし、 $a^* > 0, x^* > 0$  は連立方程式:

(Value Matching Condition)

$$u(x^*) = R(x^*); \quad (3.15)$$

(Smooth Pasting Condition)

$$u'(x^*) = R'(x^*) \quad (3.16)$$

の解として一意的に定まり、

$$a^* = q \left(\frac{q}{p}\right)^{-\frac{b^+}{\beta}} \frac{\beta}{b^+ - \beta} \left(\frac{b^+}{b^+ - \beta}\right)^{-\frac{b^+}{\beta}} \quad (3.17)$$

$$x^* = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{\beta}} \left(\frac{b^+}{b^+ - \beta}\right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (3.18)$$

□

定理 3.1, 3.2 より、最適停止領域は、式 (3.18) で定義される  $x^*$  を用いて、

$$S = [x^*, \infty) \quad (3.19)$$

と表される。

定理 3.2 の Smooth Pasting Condition は、Dixit [1], Dixit and Pindyck [2] において、様々な不確実状況における最適な投資時期を決定するための最適停止問題に対する最適値関数の解析的導出のために導入された条件であるが、その正当性と適用範囲について十分な検討がなされていないものである。

### 参考文献

- [1] Dixit, A., *The Art of Smooth Pasting*, Harwood Academic Publishers, Switzerland, 1993.
- [2] Dixit, A. and Pindyck, R., *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press, New Jersey, 1994.
- [3] Karatzas, I. and Shreve, S. E., *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, 1988.
- [4] Lamberton, D. and Lapeyre, B. (Translated by Rabeau, N. and Mantion, F.), *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman & Hall, London, 1996.
- [5] 辻村元男, Real Option Model による二酸化炭素排出権価格分析, 大阪大学大学院経済学研究科修士論文, 1998.