# 外部近似法に基づく最大リグレット最小化

01009545 大阪大学 乾口雅弘 INUIGUCHI Masahiro
(申請中) 大阪大学 ＊東谷英貴 HIGASHITANI Hidetaka
01307844 大阪大学 谷野哲三 TANINO Tetsuzo

## 1．はじめに

不明確な係数を取り扱う線形計画問題においては，係数の変動に対して最適値からの乖離をできるだけ小さくする最大リグレット最小解 [1] が提案されている．最大リグレット最小化問題は，非凹なリグレット最大化問題を部分問題として含むため，容易に解くことができない．従来，可能的最適端点をすべて列挙することにより解く方法 [2] や，リグレット最大化問題を 2 レベル計画問題とみなし，分枝限定法により解く方法 [2] が提案されている．また，不明確な係数の取りうる範囲が区間で表される場合には，リグレット最大化問題を混合整数計画問題に変換し，分枝限定法により解く方法が提案されている [3]．本研究では，リグレット最大化問題が凸最大化問題となることから，この問題に外部近似法 [4] を適用した最大リグレット最小解の計算方法を考察し，その有効性を検討する．

## 2．目的関数の係数ベクトルが凸多面体で制限された線形計画問題と最大リグレット最小化

次の不明確な係数を含む線形計画問題を考える．

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{sub. to} & \boldsymbol{x} \in X = \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}\} \end{array} \tag{1}$$

ただし，$A$ は $m \times n$ 行列であり，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^{\mathrm{T}}$ である．$\boldsymbol{\gamma}$ は可能性変数ベクトルで，次の有界な凸多面体 $\Gamma$ に制限される．

$$\Gamma = \{\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^{\mathrm{T}} \mid D\boldsymbol{c} \le \boldsymbol{g}\} \tag{2}$$

$D$ は $p \times n$ 行列であり，$\boldsymbol{g} = (g_1, g_2, \dots, g_p)^{\mathrm{T}}$ である．なお，$X$ は有界であると仮定する．

問題 (1) では，目的関数の係数ベクトルが不明確で，凸多面体 $\Gamma$ 内にあることだけわかっている．一般に，$\Gamma$ 内のすべての係数ベクトルに対して最適となる必然的最適解は存在しない．そこで，必然的最適性からの乖離をできるだけ小さくした最大リグレット最小解 [1] を考える．最大リグレット最小解は次の最大リグレット最小化問題を解くことにより求められる．

$$\underset{\boldsymbol{x}\in X}{\text{minimize}}\ \max_{\substack{\boldsymbol{c}\in\Gamma \\ \boldsymbol{y}\in X}} (\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}) \tag{3}$$

問題 (3) の解法として，いくつかの方法が提案されている．いずれも次の緩和法に基づいたアルゴリズムであるが，Step 3 のリグレット最大化問題の解法が異なる．なお，$\varepsilon > 0$ を許容誤差とする．

**アルゴリズム 1**

**Step 1.** $\boldsymbol{c}^0 \in \Gamma$ について，$\max_{\boldsymbol{x}\in X} {\boldsymbol{c}^0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ の最適解 $\boldsymbol{z}^0 \in X$ を求める．

**Step 2.** $r^0 = 0,\ k = 1,\ \boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{z}^0$ と設定する．

**Step 3.** $\boldsymbol{x}^0$ に対するリグレット最大化問題，

$$\underset{\substack{\boldsymbol{c}\in\Gamma \\ \boldsymbol{y}\in X}}{\text{maximize}}\ (\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^0) \tag{4}$$

を解き，最適解を $(\boldsymbol{c}^k, \boldsymbol{z}^k)$，最適値を $r^k$ とする．

**Step 4.** $r^k \le r^0 + \varepsilon$ ならば，終了する．このとき，最大リグレット最小解は $\boldsymbol{x}^0$ である．

**Step 5.** 緩和問題，

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & r \\ \text{sub. to} & A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ & {\boldsymbol{c}^j}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}^j - {\boldsymbol{c}^j}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \le r, \\ & \qquad j = 0, 1, \dots, k \end{array} \tag{5}$$

を解き，$(\boldsymbol{x}^0, r^0)$ をその最適解により更新する．$k = k + 1$ として，Step 3 に戻る．

Step 3 のリグレット最大化問題 (4) は，非凹計画問題となり，従来，問題 (4) に対する種々の解法が提案されている [1–3].

## 3．凸最大化問題への変形と外部近似法

いま，$f(\boldsymbol{y})$ を次のように定義する．

$$f(\boldsymbol{y}) = \max_{\boldsymbol{c}\in\Gamma} (\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^0) \tag{6}$$

$f(\boldsymbol{y})$ は凸関数となるので，問題 (4) は次の凸最大化問題になる．

$$\underset{\boldsymbol{y}\in X}{\text{maximize}}\ f(\boldsymbol{y}) \tag{7}$$

問題 (4) が凸最大化問題になることと，$\boldsymbol{y}$ が制約集合 $X$ の可能的最適端点集合 $\Pi B(X)$ にあることから，次の外部近似法 [4] に基づいた解法により，問題 (4) を解くことができる．ただし，$\Pi B(X)$ は次のように定義される．



© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

$$\Pi B(X) = \{ \boldsymbol{y} \mid \exists \boldsymbol{c} \in \Gamma,\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \max_{\boldsymbol{z} \in X} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{y} \text{ は } X \text{ の端点} \} \quad (8)$$

**アルゴリズム 2**

**Step 1.** $p = 0$ として，$X \subseteq Y_0$ なる集合 $Y_0$ を定める．

**Step 2.** $\Pi B(Y_p)$ を求める．

**Step 3.** すべての $\boldsymbol{y} \in \Pi B(Y_p)$ について $f(\boldsymbol{y})$ を評価し，最大の $f(\boldsymbol{y})$ を与える $\boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{y}^p$ とし，$f(\boldsymbol{y}^p) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^p$ なる $\boldsymbol{c} \in \Gamma$ を $\boldsymbol{d}^p$ とする．

**Step 4.** $f(\boldsymbol{y}^p) \le r^0$ ならば終了する．このとき，最大リグレット値は $r^0$ 以下となり，$r^k = r^0$ でアルゴリズム 1 に復帰する．また，$\boldsymbol{y}^p \in X$ の場合も終了する．このとき，$\boldsymbol{c}^k = \boldsymbol{d}^p$, $\boldsymbol{z}^k = \boldsymbol{y}^p$, $r^k = f(\boldsymbol{y}^p)$ として，アルゴリズム 1 に復帰する．ただし，$r^0, r^k, \boldsymbol{c}^k, \boldsymbol{z}^k$ はアルゴリズム 1 の $r^0, r^k, \boldsymbol{c}^k, \boldsymbol{z}^k$ である．

**Step 5.** 線形計画問題

$$\underset{\boldsymbol{y} \in X}{\text{maximize}}\ \boldsymbol{d}^{p\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \quad (9)$$

の最適解を $\boldsymbol{w}^p$ を求め，$\boldsymbol{w}^p$ でアクティブな制約条件により定められる集合を $Z$ とする．

**Step 6.** $Y_{p+1} = Y_p \cap Z, p = p + 1$ として，Step 2 に戻る．

## 4．アルゴリズム 2 の各 Step での操作

### 4.1. Step 1 の $Y_0$ の定め方

アルゴリズム 2 はアルゴリズム 1 で Step 3 に反復する度に呼び出される．アルゴリズム 2 で生成される $Y_p$ は常に $X \subseteq Y_p$ を満たすので，2 回目以降のアルゴリズム 2 の呼び出しにおいては，その前に呼び出されたアルゴリズム 2 の最後の $Y_p$ により，$Y_0$ を定めることができる．したがって，最初にアルゴリズム 2 が呼び出された場合の $Y_0$ の定め方を考察すればよい．

最初にアルゴリズム 2 が呼び出される直前に，アルゴリズム 1 の Step 1 で $\boldsymbol{z}^0$ が求められているので，この基底解を用いて，$Y_0$ を定めることにする．すなわち，$\boldsymbol{z}^0$ においてアクティブな制約条件と非負条件で $Y_0$ を定める．しかし，これだけでは，$Y_0$ の有界性が保証できないので，さらに次の制約条件を加える．

$$\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \le \max_{\boldsymbol{y} \in X} \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \quad (10)$$

ただし，$\boldsymbol{e} = (1, 1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$ である．左辺の最適値は，アルゴリズム 1 を開始する直前に計算し，アルゴリズム 1 の Step 1 を再最適化計算により行えば，$\boldsymbol{z}^0$ の $X$ に関する基底形式より，スラック変数が基底変数となっている行を削除し，残りの基底変数を式 (10) から消去し，式 (10) のスラック変数を基底変数とすることにより，$\boldsymbol{z}^0$ の $Y_0$ に関する基底形式が容易に得られる．

### 4.2. Step 2 の $\Pi B(Y_p)$ の求め方

2 回目以降に呼び出されたアルゴリズム 2 における $Y_0$ に対する $\Pi B(Y_0)$ については，先に呼び出されたアルゴリズム 2 において既に求められている．したがって，ここでは，最初に呼び出されたアルゴリズム 2 における $\Pi B(Y_0)$ の求め方と Step 6 での $Y_p$ の更新に伴った $\Pi B(Y_p)$ の更新方法について述べる．

最初に呼び出されたアルゴリズム 2 における $\Pi B(Y_0)$ は，Steuer の列挙法 [5] により求めることができる．Step 1 終了後に可能的最適端点 $\boldsymbol{z}^0$ の $Y_0$ に関する基底形式が容易に求められるので，この端点を起点として可能的最適端点列挙を行えばよい．

Step 6 での $Y_p$ の更新に伴い，$\Pi B(Y_p)$ を更新するには，まず，新たに加えられた制約条件を満たさない $Y_{p-1}$ の要素を除去する．次に，Step 5 で求められた $\boldsymbol{w}^{p-1}$ の $Y_p$ に関する基底形式を求め，新たに加えられた制約条件のいずれかがアクティブとなる範囲で，Steuer[5] の列挙法を適用し，生成された可能的最適端点を追加すればよい．

## 5．おわりに

外部近似法を利用した最大リグレット最小解の一計算方法について述べた．アルゴリズム 2 では，$\Pi B(Y_p)$ を正確に求めているが，それを含む有限集合や，凸包が $Y_p$ を含む有限集合で代用することも考えられる．また，数値実験結果は発表当日に示す．

**参考文献**


1. 乾口，久米：最大リグレット最小化に基づく区間目的関数をもつ線形計画問題の解の概念，日本経営工学会誌，Vol.42, No.3, 193–199 (1991).
2. M. Inuiguchi and M.Sakawa: Minimax Regret Solution Algorithms for Linear Program with Convex Polyhedral Objective Coefficients, *Proceedings of Second European Workshop on Fuzzy Decision Analysis and Neural Networks for Management, Planning and Optimization*, 116–125 (1997).
3. H. E. Mausser and M. Laguna: A New Mixed Integer Formulation for the Maximum Regret Problem, *International Transactions in Operational Research*, Vol.5, 389–403 (1998).
4. R. Horst and H. Tuy: *Global Optimization: Deterministic Approaches, Third, Revised and Enlarged Edition*, Springer-Verlag, Berlin (1995).
5. R. E. Steuer: Algorithms for linear programming problems with interval objective function coefficients, *Mathematics of Operations Research*, Vol.6, No.3, 333–348 (1981).




© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．