1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

$M/M/1$ 待ち行列におけるある最適時間保全政策

01107945 *小柳 淳二 (KOYANAGI Junji) 鳥取大学工学部
01103205 河合 一 (KAWAI Hajime) 鳥取大学工学部

1 はじめに

待ち行列システムの保全について，待ち行列長とサーバーの状態を観測し，保全を行うかどうかを決定するというモデルを扱ってきた．ここでは，ある一定時間後に行列を観測し，その時に客がいなければ予防保全を行うが，客がいれば故障するまで使用するモデルを扱い，観測時間の最適化について考察する．

2 モデル

到着率 λ，処理率 μ の $M/M/1$ 待ち行列システムにおいて，サーバーは分布関数 $F(x)$ (密度関数 $f(x)$) にしたがう時間の後，故障するものとする．予防保全として，システム稼働時に，あらかじめ時間 T を定めておき，システム稼働後 T 時間経過した時にシステムが空であれば予防保全を行う．T 時間経過した時にシステムが客をサービス中であれば予防保全をせずに故障するまでサーバーを使用し，故障したときに事後修理を行う．T 時間経過する前に故障した場合にはただちに事後修理を行う．

故障時にシステム内にいた客，および修理中に到着した客は失われるものとして，失われる客数の長時間平均を最小にするように予防保全の時間 T を定めることを目的する．

3 定式化

時間 T を与えた時，サーバーが起動してから予防保全か事後保全をへて，再び起動するまでの期待時間を $L(T)$，その時間の間に失われる期待客数を $C(T)$ とおく．失われる客の長時間平均を最小にするには，$C(T)/L(T)$ を最小にするように T を定めることになる．T 時間後にからの場合，T 以前に故障した場合，T 以後に故障した場合にわけて，$C(T), L(T)$ は以下のように表される．

$$
\begin{aligned}
C(T) &= \lambda h_1 \overline{F}(T) P_{00}(T) \\
&\quad + \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^T (j+\lambda h_2) f(x) P_{0j}(x)dx \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} (j+\lambda h_2) f(T+x) P_{0i}(T) P_{ij}(x)dx \\
L(T) &= (T+h_1)\overline{F}(T) P_{00}(T) \\
&\quad + \int_0^T (x+h_2) f(x)dx \\
&\quad + \int_0^{\infty} (T+x+h_2) f(T+x)(1-P_{00}(T))dx
\end{aligned}
$$

ここで

$P_{ij}(x)$: 待ち行列長が i から x 時間後に j になる確率，

h_1, h_2 : それぞれ予防修理，事後修理にかかる期待時間，($h_1 < h_2$, $h \equiv h_2 - h_1$ とする)

とする．

ここで，

$$
\begin{aligned}
Q_i(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} j P_{ij}(x). \\
a &= \int_0^{\infty} \overline{F}(x)dx \\
b &= \int_0^{\infty} Q_0(x) f(x)dx
\end{aligned}
$$

を定義し，以下のように $C(T), L(T)$ を変形する．

$$
\begin{aligned}
C(T) &= \lambda h_1 \overline{F}(T) P_{00}(T) \\
&\quad + \int_0^T Q_0(x) f(x)dx + \int_0^T \lambda h_2 f(x)dx \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f(T+x) P_{0i}(T) Q_i(x)dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\lambda h_2 f(T+x)P_{0i}(T)dx \\
&=\lambda h_1\overline{F}(T)P_{00}(T) \\
&\quad+\int_0^T Q_0(x)f(x)dx+\int_0^T \lambda h_2 f(x)dx \\
&\quad+\int_0^{\infty} f(T+x)(Q_0(T+x)-P_{00}(T)Q_0(x))dx \\
&\quad+\int_0^{\infty}\lambda h_2 f(T+x)(1-P_{00}(T))dx \\
&=\lambda h_2+b \\
&\quad-P_{00}(T)\left[\int_0^{\infty} f(T+x)Q_0(x)dx+\lambda h\overline{F}(T)\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L(T)&=(T+h_1)\overline{F}(T)P_{00}(T) \\
&\quad+\int_0^T (x+h_2)f(x)dx \\
&\quad+\int_0^{\infty}(T+x+h_2)f(T+x)(1-P_{00}(T))dx \\
&=h_1\overline{F}(T)P_{00}(T)+h_2+a-h_2\overline{F}(T)P_{00}(T) \\
&\quad-\int_0^{\infty}\overline{F}(T+x)P_{00}(T)dx \\
&=h_2+a \\
&\quad-P_{00}(T)\left[h\overline{F}(T)+\int_T^{\infty}\overline{F}(x)dx\right]
\end{aligned}
$$

予防保全を行わない場合の損失客の長時間平均は

$$\frac{C(\infty)}{L(\infty)}\equiv\frac{\lambda h_2+b}{h_2+a}$$

で与えられ，T を与えた場合との差を考えるため，以下のように $D(T)$ を定める．

$$
\begin{aligned}
&\frac{C(\infty)}{L(\infty)}-\frac{C(T)}{L(T)} \\
&=\frac{C(\infty)L(T)-C(T)L(\infty)}{L(\infty)L(T)} \\
&=\frac{P_{00}(T)D(T)}{L(\infty)L(T)}
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
D(T)&=h(a\lambda-b)\overline{F}(T) \\
&\quad+(a+h_2)\int_0^{\infty} f(T+x)Q_0(x)dx \\
&\quad-(b+\lambda h_2)\int_T^{\infty}\overline{F}(x)dx
\end{aligned}
$$

である．

定理 1

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\overline{F}(T)}{\int_T^{\infty}\overline{F}(x)dx}\to\infty$$

ならば，最適保全時間 T^* は有限の値を持つ．

証明.

ある T に対して$\dfrac{C(\infty)}{L(\infty)}-\dfrac{C(T)}{L(T)}>0$，すなわち $D(T)>0$ となる T が存在することをしめせばよい．

まず $T=0$ に対して，

$$
\begin{aligned}
D(0)&=h(a\lambda-b) \\
&\quad+(a+h_2)b-(b+\lambda h_2)a \\
&=-h_1(a\lambda+b)<0
\end{aligned}
$$

となる．次に

$$
\begin{aligned}
a\lambda-b&=\lambda\int_0^{\infty}\overline{F}(x)dx-\int_0^{\infty} f(x)Q_0(x)dx \\
&=\mu\left[\int_0^{\infty}\overline{F}(x)dx-\int_0^{\infty}\overline{F}(x)P_{00}(x)dx\right] \\
&>0
\end{aligned}
$$

が部分積分および $Q_0'(x)=\lambda-\mu(1-P_{00}(x))$ から示される．よって，$h(a\lambda-b)>0$ が示される．

$D(T)$ の第 2 項については $(a+h_2)\int_0^{\infty} f(T+x)Q_0(x)dx\geq 0$ が成立する．さらに

$$
\begin{aligned}
&\int_T^{\infty}\overline{F}(x)dx\Bigg[h(a\lambda-b)\frac{\overline{F}(T)}{\int_T^{\infty}\overline{F}(x)dx} \\
&\qquad-(b+\lambda h_2)\Bigg]
\end{aligned}
$$

の符号が仮定により T の増大につれ，負から正になることがわかる．よって，ある有限の T に対して $D(T)>0$ となることが示された．

以上のことから最適保全時間 T は有限の値を持つ．