ダムの容量と流量の制御

01700130　慶應義塾大学　柳井　浩　YANAI Hiroshi
02401900　慶應義塾大学　*西村　友志　Nishimura Tomoyuki

1 はじめに　河川の流量は一定ではない．小規模な増減はおくことにしても，雨期，乾期，融雪期など季節によって大きな変化が見られることはまれでなく，これが，下流に洪水や渇水を引き起こす．

そこで，貯水池(ダム)を設け，過剰な流量を貯え，不足時にこれを放流して，下流の流量を平準化することが行われる．しかしながら，貯水池の容量に限度があれば，流量を完全に一様なものにするのは不可能である．

さて，そこで流量の変化に対して，ある容量の貯水池にどのように水を貯え，どのようにこれを放流すれば，どの程度の効果が上がるのか調べてみる必要がある．簡単な仮定の下で，その方法を示した．

2 流量とその図示　河川の流量変化は自然の現象で年々変化するのが普通であるが，それでも，年々おおよそ一定のパターンに従った変化が見られるので，この基本的なパターンに対する策を講じよう．

いま，ある河川の流量は，毎年同じように繰り返される階段関数で，図1の上部に示されるようなハイドログラフで与えられるものとする．

$$f(t) \quad : \quad \text{時刻}t\text{における流量} \tag{1}$$

$$F(t)=\int_0^t f(\xi)d\xi \quad : \quad \text{時刻}0\text{から}t\text{までの累積流量} \tag{2}$$

図1の下部に$F(t)$を図示した．これを累積チャートという．

また，

$$\hat{f} = \begin{pmatrix} \hat{f}_1 \\ \vdots \\ \hat{f}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1 f_1 \\ \vdots \\ \tau_n f_n \end{pmatrix} : \text{流量ベクトル} \tag{3}$$

というベクトルを定義するが，これは各期の総流量を一年分並べたものである．

3 貯水池による流出量の制御　いま，この河川に容量Cの貯水池を設け，時刻$t=0$から流出量の制御をすることを考える．上流からの水をすべてこの貯水池に

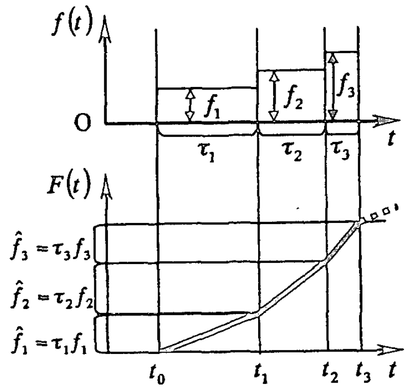

図 1: 河川の流量の変化と累積流量

導けば，前節で述べた流量が，この貯水池への流入量ということになる．

一方，流出量は流入量と同期して毎年同じように繰り返されるものとする．

$$g(t) \quad : \quad \text{時刻}t\text{における流出量} \tag{4}$$

$$G(t)=\int_0^t g(\xi)d\xi \quad : \quad \text{時刻}0\text{から}t\text{までの累積流出量} \tag{5}$$

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} \hat{g}_1 \\ \vdots \\ \hat{g}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1 g_1 \\ \vdots \\ \tau_n g_n \end{pmatrix} : \text{流出量ベクトル} \tag{6}$$

このとき，年間流入量および年間流出量は，それぞれ，

$$F_T = \hat{f}_1 + \hat{f}_2 + \cdots + \hat{f}_n : \text{年間流入量} \tag{7}$$

$$G_T = \hat{g}_1 + \hat{g}_2 + \cdots + \hat{g}_n : \text{年間流出量} \tag{8}$$

であるが，長年にわたる収支を考えれば，これらは互いに等しくなければならない．

ところで，図2からもわかるように，容量Cの貯水池が溢水もしくは枯渇しないためには，

$$F(t) \geq G(t) \geq F(t) - C \tag{9}$$

が常に成立していなければならない．ここに，(9)式の右辺を

$$G_L(t) = F(t) - C : \text{累積流出量下限} \tag{10}$$

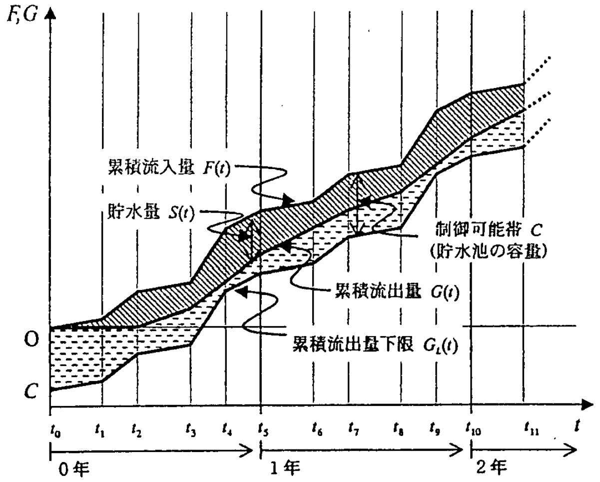

図 2: 貯水池の流入量と流出量の関係 $(n=5)$

とよぶことにする.

いいかえれば，貯水池の容量がCであるとき，流出量の制御が可能なのは，累積流出量$G(t)$が，累積流出量下限$G_L(t)$と累積流入量$F(t)$の曲線にはさまれる“帯”（図2参照）の範囲である．この帯を**制御可能帯**とよぶことにしよう.

これを各期の流入・流出量に翻訳してみよう．数学的に言えば,

$$\max_{i,j}\left\{\hat{F}_i^j-\hat{G}_i^j\right\}\leq C \tag{11}$$

という条件を満たす範囲の流出が可能である.（証明略）ここに,

$$\hat{F}_i^j=\sum_{k=i}^{j}\hat{f}_k \quad , \quad \hat{G}_i^j=\sum_{k=i}^{j}\hat{g}_k \tag{12}$$

すなわち，$\hat{F}_i^j,\hat{G}_i^j$は，第i期から第j期までにわたる流入量および流出量である.

(11)式をさらに詳しく計算すれば，$n=2,3$のときには，これが$\hat{f}-\hat{g}$のチェビシェフ・ノルム

$$\rho(\hat{f},\hat{g})=\max_i\left(|\hat{f}_i-\hat{g}_i|\right)\leq C \tag{13}$$

に帰着することがわかる.

4. 流出量の実現可能範囲　さらに，$n=2,3$の場合には，前節の議論を図3,4のように図解できる.

年間流入量F_Tと年間流出量G_Tは等しいから，ベクトル$\hat{f},\hat{g}$の終点が動きうる範囲は，成分の和が一定の直線や平面の第1象限部分である.

また，貯水池の容量C，および，流入量ベクトル$\hat{f}$が与えられれば，流出量ベクトル$\hat{g}$の実現可能な範囲が定まるが，その$n=2,3$の場合の具体的な形は，図3,4に示されているように，$\hat{f}$を中心とする長さ$\sqrt{2C}$の線分，あるいは，一辺の長さ$\sqrt{2C}$の正六角形になる.

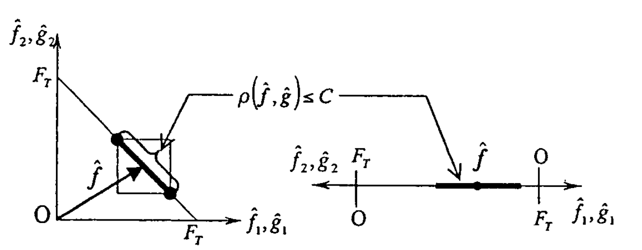

図 3: 実現しうる流出量ベクトル$\hat{g}$の等高線 $(n=2)$

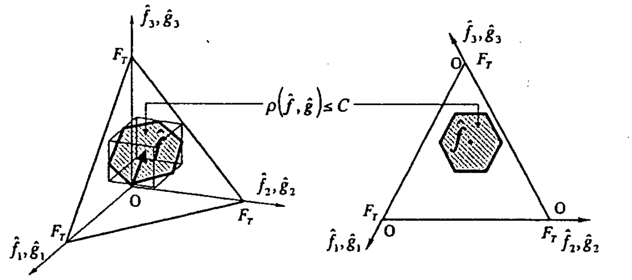

図 4: 実現しうる流出量ベクトル$\hat{g}$の範囲 $(n=3)$

5. 合流河川の流量調節

2つの河川L,Mが合流して河川Nとなる．このとき，上流の河川LおよびMに，容量がC^LおよびC^Mの貯水池を設け，河川Nの流量を調節する問題を考える.

河川L,Mの流入量を$\hat{f}^L,\hat{f}^M$とすれば，上流に貯水池がなければ，河川Nに流れ込む流入量は,

$$\hat{f}^N=\hat{f}^L+\hat{f}^M \quad : \quad \text{河川}N\text{の流入量ベクトル} \tag{14}$$

となるが，上流の貯水池によって，河川L,Mの流出量が$\hat{g}^L,\hat{g}^M$に調整されたとすれば，河川Nへの流出量は,

$$\hat{g}^N=\hat{g}^L+\hat{g}^M : \text{河川}N\text{の流出量ベクトル} \tag{15}$$

となり，これが調節の対象となる.

三角不等式からただちに導かれるように,

$$\begin{aligned}\rho(\hat{f}^N,\hat{g}^N) &= \rho(\hat{f}^L+\hat{f}^M,\hat{g}^L+\hat{g}^M)\\ &\leq \rho(\hat{f}^L,\hat{g}^L)+\rho(\hat{f}^M,\hat{g}^M)\end{aligned} \tag{16}$$

であるから,

$$\rho(\hat{f}^N,\hat{g}^N)\leq C^L+C^M \tag{17}$$

すなわち，これが河川Nの流量を調節することができる範囲である.

参考文献

[1] 伊藤　弦, 柳井　浩「ダム建設の最適位置と最適容量」『オペレーションズ・リサーチ』1996年,pp.228-235 日本オペレーションズ・リサーチ学会