

マルコフ連鎖における木と基本閉路確率フロー

申請中 日本大学生産工学部 † 松生 拓倫
 Nihon University Matsuike Hironori
 01205220 日本大学生産工学部 篠原 正明
 Nihon University Shinohara Masaaki

1 はじめに

遷移確率行列 P をもつ離散時間マルコフ過程ならびに推移速度行列 Q をもつ連続時間マルコフ過程などに代表されるマルコフ連鎖の定常状態確率は線形連立方程式 $P^T x = x, x^T \xi = 1$ ならびに、 $Q^T x = 0, x^T \xi = 1$ (ただし、 $\xi = [1, 1, \dots, 1]^T$ である) を解くことにより評価できるが、本論文ではマルコフ連鎖の確率遷移に確率フローの概念を導入し、グラフ理論に基づく木 (tree) が定める木枝に対して基本カットセット系を生成し、確率フロー保存則によって定常状態確率が定式化可能であることを示す。

2 マルコフ連鎖定常状態確率の定式化

ここからは離散時間に限定して議論をするが、連続時間においては $P^T - I$ と Q^T 対応づけることで離散時間と同様な解析手法で求めることが可能であり、以下の議論は連続時間に対しても適用可能である。

P を $n \times n$ 型遷移確率行列とし、その第 (i, j) 要素の成分 p_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, \dots, n$) は状態 i から状態 j への遷移確率を表すものとする。ただし $\sum_j p_{ij} = 1$ とする。このとき定常状態確率を $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ とすると、 x は次式 (1), (2) における連立一次方程式を解くことにより求めることができる。

$$P^T x = x \tag{1}$$

$$x^T \xi = 1 \tag{2}$$

3 確率フロー枝変数の導入

図 1 において、状態 i と状態 j との間には状態 i から状態 j への重み p_{ij} を持つ遷移有向枝と逆方向の重み p_{ji} をもつ遷移有向枝が存在するが、これら一対の遷移を一つの無向枝に置換

する (図 2)。これにより、確率フロー枝変数 F_{**} を導入する。さらに、導入した確率フロー枝変数 F_{**} に対して、仮想的な流れを導入するために方向を明確に定義する必要性が出てくる。

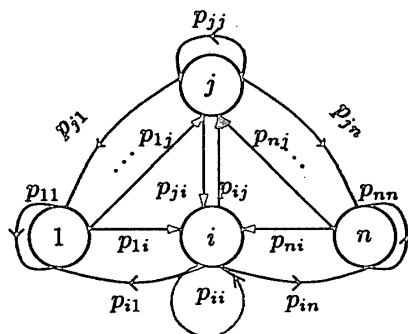


図 1: マルコフ連鎖の状態遷移

定義 3.1 無向枝 (i, j) 上を状態 i から状態 j へ流れる確率フロー枝変数を

$$F_{ij} = p_{ij}x_i - p_{ji}x_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \tag{3}$$

で表わすことにする。

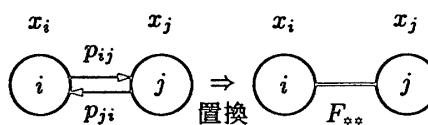


図 2: 確率フロー枝変数 F_{**} の導入

4 カットセット解析

一対の状態間遷移有向枝を仮想的に方向付けを施した有向枝で置換をしたネットワーク N 上において、木 (tree) を 1 つ定め、その木のカットセット枝接続行列を $C = [I|B_t]$ とし、 $F_{ij} = f_k$ ($k = 1, 2, \dots, |F|$, ただし $F_{ij} \in F$) とする。そして、 $f_t, f_c, (|t| + |c| = |F|)$ をそれぞれ、木の枝上フロー変数及び、補木の枝上フロー

変数とすると、定められた木に対応する基本カットセット系に対して確率フロー保存則は次式で表現することができる。

$$Cf = [I|B_t] \begin{bmatrix} f_t \\ f_c \end{bmatrix} = O \quad (4)$$

(i.e.)

$$f_t = -B_t f_c \quad (5)$$

これにより、 f_t は f_c の一次結合で表現することができる。

5 例題

図3における4状態マルコフ連鎖に対してカットセット解析を適用する。

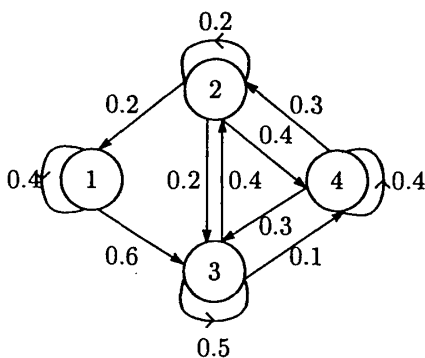


図3: 4状態マルコフ連鎖

仮想的に方向付けを施したネットワークを図4に示しておく。

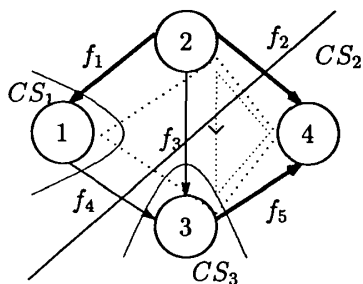


図4: 仮想的に方向付けを施したネットワーク

図4における太線の木を考え、この木に対応する基本カットセット系に対して定義 3.1 及び、確率フロー保存則を適用することで次式を得るこ

とができる。

$$\begin{cases} f_1 = p_{21}x_2 - p_{12}x_1 \\ f_2 = p_{24}x_2 - p_{42}x_4 \\ f_3 = p_{23}x_2 - p_{32}x_3 \\ f_4 = p_{13}x_1 - p_{31}x_3 \\ f_5 = p_{34}x_3 - p_{43}x_4 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} f_1 = f_4 & \dots \text{基本カットセット 1} \\ f_2 + f_3 + f_4 = 0 & \dots \text{基本カットセット 2} \\ f_3 + f_4 = f_5 & \dots \text{基本カットセット 3} \end{cases} \quad (7)$$

これにより、(6)式における f_k を (7)式に代入をほどこし、 $\sum_i x_i = 1$ ($i = 1, 2, 3, 4$) という条件の下で x_i に関する連立一次方程式を解くことにより定常状態確率 x が求めることができ、さらに、確率フロー枝変数 f_k も算出できる。以下にその値を示しておく。

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix} = \frac{1}{160} \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ -6 \\ -15 \\ 9 \end{bmatrix}$$

また、補木枝 (1,3), (3,4) の確率フロー f_4, f_5 が各図中破線で示す2つの基本閉路フローを構成していることがわかる。

6 むすび

従来の手法では節点方程式に対応する連立方程式 (1) 式によってマルコフ連鎖の定常状態確率が定式化されていたが、提案するカットセット解析法により木に対応した基本カットセット系における確率フロー保存則によっても定式化可能であることを示した。今後の課題としては、基本閉路フローや確率フロー等の概念を用いたマルコフ連鎖の構造解析などがあげられる。

参考文献

- [1] T.L.Saaty, *The Analytic Network Process*, RWS Publication, 1996.