2000 年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

外部近似法による大域的最適探索問題の効率的解法

02004810　防衛大学校　*海老澤　文衛　EBISAWA Bune
01000890　防衛大学校　飯田　耕司　IIDA Koji
01504810　防衛大学校　宝崎　隆祐　HOHZAKI Ryusuke

1　はじめに

これまでの探索努力配分問題では，最大化目的関数が凹の場合にはKuhn-Tuckerの必要十分条件による効率的なアルゴリズムが確立されている．しかし，目的関数が非凹の場合には組み合わせ問題となり，未解決の問題が多い．本研究は，非凹の目的関数を持つ探索努力配分問題をD．C．(Differences of two Convex functions) 問題に変換し，さらにこれを凸の解集合上における凹最小化問題に帰着して解く．ここでは，凹最小化問題の典型的な解法の1つである外部近似法 (Outer Approximation Method)[1] を適用して計算するとともに，アルゴリズムを高速化する新しい工夫を提案し，数値実験の結果を報告する．例題としては，ネットワーク上の移動目標物に対する探索努力配分問題 [2] を扱う．

2　モデルの前提

モデルの前提は以下に列記するとおりである．

1. 探索空間は m 個のノードの集合 N と n 個のアークの集合 A を持つネットワーク $G=(N,A)$ である．ノードは $i=1,\cdots,m$ で，アークは $k=1,\cdots,n$ で番号付けられている．
2. 目標物は G 上の始点ノード s から終点ノード e に至る閉路ではない複数の経路のうちから1つを選択して移動する．経路 l は n_l 個のアークからなり，その上を目標物が移動するアークの番号の順番により $l=\{l(1),l(2),\cdots,l(n_l)\}$ と表される．目標物が選択しうる経路全体の集合を L とする．目標物が経路 l を選ぶ確率 $\pi_l(0<\pi_l<1,\sum_{l\in L}\pi_l=1)$ は探索者に既知とする．
3. 探索者はネットワーク上のアークに探索努力を配分して目標物を待ち受け，探知に努める．探索努力の総量は M であり，それを任意に分割してアークに配分できる．アーク k に配分する探索努力量を φ_k，探索者の探索計画を $\Phi=\{\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$ で表す．
4. アーク k に配分した探索努力 φ_k により，ここを通る目標物は，確率 $p_k=1-\exp(-\alpha_k\varphi_k)$(ただし $\alpha_k>0$) で探知される．アーク k で目標物を探知すれば，探索者は価値 V_k を獲得するが，単位探索努力量当たり C_k の探索コストを消費する．
5. 探索者は，期待利得（獲得する目標価値から探索コストを引いた値の期待値）を最大にすることを目的とする．

3　定式化と凹最小化問題への変換

前提より期待利得は次式となる．

$$R(\Phi)=\sum_{l\in L}\pi_l\sum_{i=1}^{n_l}\left[V_{l(i)}\exp\left(-\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_{l(j)}\varphi_{l(j)}\right)\cdot p_{l(i)}\right]-\sum_{k=1}^{n}C_k\varphi_k.$$

したがって，問題は次式で定式化される．

$$\begin{aligned}(\mathbf{P_0})\ \max_{\Phi}\ &:\ R(\Phi)\\ s.t.\ &:\ \sum_{k=1}^{n}\varphi_k\le M,\\ &\quad\ \varphi_k\ge 0,k=1,2,\cdots,n.\end{aligned}$$

上記の目的関数 $R(\Phi)$ は2つの凸関数 $g(\Phi),f(\Phi)$ の差の形に変形できる．

$$\begin{aligned}R(\Phi)&=g(\Phi)-f(\Phi),\\ g(\Phi)&:=\sum_{l\in L}\pi_l\sum_{i=1}^{n_l}\left[V_{l(i)}\exp\left(-\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_{l(j)}\varphi_{l(j)}\right)\right],\\ f(\Phi)&:=\sum_{l\in L}\pi_l\sum_{i=1}^{n_l}\left[V_{l(i)}\exp\left(-\sum_{j=1}^{i}\alpha_{l(j)}\varphi_{l(j)}\right)\right]+\sum_{k=1}^{n}C_k\varphi_k.\end{aligned}$$

ゆえに，問題 $\mathbf{P_0}$ はD．C．問題である．ここで新たに変数 t を導入すれば，問題 $\mathbf{P_0}$ は凸の解集合上における次の凹関数 $F(\Phi,t)$ の最小化問題 $\mathbf{P_1}$ に帰着できる．

$$\begin{aligned}(\mathbf{P_1})\ \min_{(\Phi,t)}\ &:\ F(\Phi,t)\\ s.t.\ &:\ (\Phi,t)\in D.\end{aligned}$$

ただし，

$F(\Phi,t):=t-g(\Phi)$, $G(\Phi,t):=f(\Phi)-t,$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

$$D := \left\{ (\Phi,t) \in \mathbf{R}^{n+1} | G(\Phi,t) \le 0, \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \le M, \right.$$
$$\left. \varphi_k \ge 0, 0 \le t \le T \right\}$$

であり，T は $\max_{\Phi \in D_\Phi} f(\Phi) << T$ となる十分大きな正数とする．

4 解法のアルゴリズム

アルゴリズムは反復 $k = 0,1,2\cdots$ で切除平面により $P^0 \supset P^1 \supset \cdots P^k \cdots \supset D$ となる多面体 P^k を構成する反復解法である．新しく提案するアルゴリズムでは，より深い切除平面を生成するために，*step.k.*2 において内点 w を t 軸方向で最適化する．

初期設定：

ある有効な実行可能解 $w = (\Phi_w, t_w)$ を決定し，暫定最適値（目的関数の上界）：$\gamma^0 \leftarrow F(w)$, 暫定最適解：$X_{opt} \leftarrow w$ とする．

$$P^0 := \left\{ (\Phi,t) \in \mathbf{R}^{n+1} | \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \le M, \varphi_k \ge 0, 0 \le t \le T \right\}$$

を初期多面体とし，その端点の集合 $V(P^0)$ を計算する．$k \leftarrow 1$ とする．

反復k：

*step.k.*1: $v^k \leftarrow \arg\min F(V(P^{k-1})), \mu^k \leftarrow F(v^k)$ を計算する．μ^k は目的関数の下界を表す．

*step.k.*2: 従来の一般的な外部近似法では $w^* \leftarrow w$ として *step.k.*3 へ進むが，新しく提案する手法では次のように w^* を決定する．

(New Method)

$w_L := (\Phi_w, f(\Phi_w) + \epsilon), w_H := (\Phi_w, T - \epsilon)$ とし，w_x を線分 $[w_L, w_H]$ 上の点，$w_x \in [w_L, w_H]$ とする．また，$u_x := [v^k, w_x] \cap \{x \in (\Phi,t) | t = f(\Phi)\}$ は 2 分法により数値的に計算し，距離 $L(w_x) := \|v^k - u_x\|$ とする．

Lemma. $L(w_x)$ は凸である．

(*step*1): $\frac{\triangle L(w_L)}{\triangle w} \ge 0$ であれば，$w^* \leftarrow w_L$ として終了，そうでなければ (*step*2) に進む．

(*step*2): $\frac{\triangle L(w_H)}{\triangle w} \le 0$ であれば，$w^* \leftarrow w_H$ として終了，そうでなければ (*step*3) に進む．

(*step*3): 以下の 2 分法で $w^* \in [w_L, w_H]$ を求める．

(*step*3.1): $c \leftarrow 0.5 * (w_L + w_H)$ とする．

(*step*3.2): $\frac{\triangle L(c)}{\triangle w} \ge 0$ であれば $w_H \leftarrow c$, そうでなければ $w_L \leftarrow c$ として (*step*3.3) に進む．

(*step*3.3): $|L(w_L) - L(w_H)| < \epsilon$ であれば $w^* \leftarrow c$ として終了，そうでなければ (*step*3.1) へ戻る．

*step.k.*3: $u^k \leftarrow [v^k, w^*] \cap \{x \in (\Phi,t) | t = f(\Phi)\}$ を計算する．$\gamma^k \leftarrow \min\{F(u^k), \gamma^{k-1}\}$ とし，$\gamma^{k-1} > F(u^k)$ ならば $X_{opt} \leftarrow u^k$ とする．

*step.k.*4: $\alpha^k \leftarrow \triangledown G(u^k), l^k(x) := \alpha^k(x - u^k)$ とし，$P^k \leftarrow P^{k-1} \cap \{x \in \mathbf{R}^{n+1} | l^k(x) \le 0\}$ とする．

*step.k.*5: $V(P^k)$ を計算する．

停止条件：

収束条件 $\frac{|\gamma^k - \mu^k|}{\gamma^k} < \epsilon$ が十分小さい ϵ に対して成立すれば反復を停止，そうでなければ $k \leftarrow k+1$ として反復を繰り返す．

上記のアルゴリズムにおいて，問題 $\mathbf{P_1}$ の最適値 F^* に対し，$\mu^k \le \mu^{k+1} \le F^* \le \gamma^{k+1} \le \gamma^k, k = 0,1,2,\cdots$ となることが証明され，問題の最適値が誤差 ϵ の精度で求まる．

5 数値実験

数値実験の結果については発表の当日に報告する．

参考文献

[1] H.P.Benson : Deterministic algorithm for constrained concave minimization : A unified critical survey. *Naval Research Logistics,* **43** (1996) 765-795.

[2] R.Hohzaki , K.Iida and M.Teramoto : Optimal search for a moving target with no time information maximizing the expected reward. *Journal of the Operations Research Society of Japan,* **42** (1999) 167-179.

[3] R.Horst , P.M.Paradalos and N.V.Thoai : *Introduction to Global Optimization* (Kluwer Academic Publishers,London, 1995).

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．