逆凸計画問題に対する内部近似法

大阪大学　*谷口 尚　TANIGUCHI Takashi
02701684　大阪大学　山田 修司　YAMADA Syuuji
01307844　大阪大学　谷野 哲三　TANINO Tetsuzo
01009544　大阪大学　乾口 雅弘　INUIGUCHI Masahiro

1　はじめに

本研究では，逆凸計画問題 (Reverse Convex Programming Problem) に対する内部近似法を提案する．これまでの研究では，凸多面体の内部集合の補集合として表される逆凸制約をもつ凸関数最小化問題に対する内部近似法が提案されている．本研究で提案する解法は，逆凸制約が非線形な凸関数で定義される場合においても有効である．

2　逆凸計画問題

本研究では，次の逆凸計画問題を考える．

$$(RCP)\begin{cases} \text{minimize} & f(x) \\ \text{subject to} & x \in Y\backslash \text{int } X. \end{cases}$$

ただし，$f : R^n \to R$ は微分可能な凸関数，集合 $Y \subset R^n$ は閉凸集合，集合 $X \subset R^n$ はコンパクトな凸集合，int X は X の内部集合とする．さらに，問題 (RCP) に対して次の仮定が成立するものとする．

(A1) $f(0) = \min\{f(x) : x \in Y\}$．また任意の $\alpha \geq f(0)$ に対して $\{x \in R^n : f(x) \leq \alpha\}$ はコンパクト集合である．

(A2) $X = \{x \in R^n : p(x) \leq 0\}$，$Y = \{x \in R^n : r(x) \leq 0\}$ とする．ただし，$p(x) = \max\{p_j(x) : j = 1,\ldots,t_X\}$, $r(x) = \max\{r_j(x) : j = 1,\ldots,t_Y\}$ であり，$p_j\ (j = 1,\ldots,t_X)$, $r_j\ (j = 1,\ldots,t_Y)$ は次を満たす微分可能な凸関数である:

$$p_j(0) < 0\ j = 1,\ldots,t_X,\ r_j(0) \leq 0\ j = 1,\ldots,t_Y.$$

さらに，ある $x' \in R^n$ に対して，$r_j(x') < 0\ (j = 1,\ldots,t_Y)$ が成立する．

(A3) $Y\backslash \text{int } X \neq \emptyset$.

(A4) 任意の $x \in (\text{bd } X) \cap Y$，$w \in \partial p(x)$ に対して，

$$\{y \in R^n : \langle w, y - x\rangle \geq 1\} \cap \text{int } Y \neq \emptyset$$

である．ただし，bd X は集合 X の境界集合，int Y は集合 Y の内部集合を表す．さらに，$\partial p(x)$ は関数 p の x における劣微分を表す．

仮定 (A2) より，int $X = \{x \in R^n : p(x) < 0\}$ および int $Y = \{x \in R^n : r(x) < 0\}$ が成立する．また，仮定 (A1) より，問題 (RCP) の最適解が存在することがわかる．ここで，問題 (RCP) の最適値を $\min(RCP)$ とする．

3　内部近似法

本研究では，問題 (RCP) に対する内部近似法を提案する．

アルゴリズム IA

ステップ 0. $Z_1 \subset X$ かつ $0 \in$ int (co Z_1) を満たす $Z_1 = \{y^1,\ldots,y^{n+1}\}$ を生成する．$S_1 =$ co Z_1 とし，$V((S_1)^\circ)$ を求める．ただし，$(S_1)^\circ$ は S_1 の極集合，$V((S_1)^\circ)$ の頂点集合を表す．便宜上，$V((S_0)^\circ) = \emptyset$ とし，$k \leftarrow 1$ として，ステップ 1 へ．

ステップ 1. $\Gamma_k = \{v \in V((S_k)^\circ) : H_{\geq}(v) \cap Y \neq \emptyset\}$ とする．ただし，$H_{\geq}(v) = \{x \in R^n : \langle v, x\rangle \geq 1\}$ である．すべての $v \in \Gamma_k \backslash V((S_{k-1})^\circ)$ に対して，次の凸最小化問題の最適解を x^v とする．

$$(SP(v))\begin{cases} \text{minimize} & f(x) \\ \text{subject to} & x \in Y \cap H_{\geq}(v). \end{cases}$$

さらに，$f(x^{v^k}) = \min\{f(x^v) : v \in \Gamma_k\}$ を満たす $v^k \in \Gamma_k$ を選ぶ．また，問題 $(SP(v^k))$ の最適解を $x(k)$ とし，ステップ 2 へ．

ステップ 2.

a. $p(x(k)) \geq 0$ ならば，アルゴリズムを停止する．このとき，$x(k)$ は問題 (RCP) の最適解である．

b. $p(x(k)) < 0$ ならば，次の制約なし凸最小化問題の最適解を z^k とする．

$$\begin{cases} \text{minimize} & \phi(x; v^k) \\ \text{subject to} & x \in R^n. \end{cases} \tag{1}$$

ただし，$\phi(x; v^k) = \max\{p(x), -\langle v^k, x\rangle + 1\}$ とする．ここで，$Z_{k+1} = Z_k \cup \{z^k\}$，$S_{k+1} =$ co Z_{k+1} とし，$V((S_{k+1})^\circ)$ を求める．$k \leftarrow k+1$ として，ステップ 1 へ戻る．

補題 3.1 アルゴリズム *IA* の反復 k において，$S_k \subset X$ とする．このとき，$z^k \in X$ が成立する．

補題 3.1 より，次が成立する．

$$S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_k \subset \cdots \subset X. \tag{2}$$

したがって，任意の k に対して，次の問題 (P_k) は問題 (RCP) の緩和問題である．

$$(P_k)\begin{cases} \text{minimize} & f(x) \\ \text{subject to} & x \in Y\backslash \text{int } S_k. \end{cases}$$

また，$Y \cap (R^n\backslash \text{int } S_k) = \cup_{v \in \Gamma_k} H_{\geq}(v)$ となるので，アルゴリズム IA のステップ 1 で与えられる $x(k)$ は問題 (P_k) の最適解でとなる，すなわち，$g(x(k)) = \min(P_k)$ が成立する．ただし，$\min(P_k)$ は問題 (P_k) の最適値を表す．さらに，(2) より次が成立する．

$$g(x(1)) \leq g(x(2)) \leq \cdots \leq g(x(k)) \leq \cdots \leq \min(RCP).$$

定理 3.1 アルゴリズム *IA* より生成される点列 $\{x(k)\}$ の任意の集積点は問題 (RCP) の最適解である．

定理 3.1 より，$\lim_{k\to\infty} g(x(k)) = \min(RCP)$ が成立する．

4　ペナルティ関数法，障壁関数法を用いた内部近似法

本章では，ペナルティ関数法および障壁関数法を用いることにより問題 (RCP) を過小評価する内部近似法のアルゴリズムを提案する．ここで，次の仮定が成立するものとする．

(A5) 実数 $M > \Delta(X)$ が与えられるものとする．ただし，$\Delta(X) := \max\{\|x-y\| ; x, y \in X\}$ である．

アルゴリズム IA-PB

数列 $\{\tau_k\}$ を $\lim_{k\to\infty} \tau_k = 0$，すべての k に対して，$\tau_k > 0$ を満たすものとする．

ステップ 0. パラメータ $\mu_1 > 0$, $B > 1$, $s > 1$, $\eta_1 > 0$, $0 < \rho < 1$, $0 < \xi < 1$ を選ぶ．$Z_1 \subset \mathrm{int}\, X$ かつ $0 \in \mathrm{int}\,(\mathrm{co}\, Z_1)$ を満たす Z_1 を生成する．$S_1 = \mathrm{co}\, Z_1$ とし，$(S_1)^\circ$ の頂点集合 $V((S_1)^\circ)$ を求める．$\alpha_1 = \xi|\max_{x\in Z_1} p(x)|$ を求める．$k \leftarrow 1$ として ステップ 1 へ．

ステップ 1. すべての $v \in V((S_k)^\circ)$ に対して，次の制約なし凸最小化問題を考える．

$$(SP1(v,\mu_k)) \begin{cases} \text{minimize} & F_{v,\mu_k}(x) = f(x) + \mu_k\theta_v(x), \\ \text{subject to} & x \in R^n. \end{cases}$$

ただし，

$$\theta_v(x) = \sum_{j=1}^{t_Y}[\max\{0, r_j(x)\}]^s + [\max\{0, -\langle v, x\rangle + 1\}]^s$$

とする．この問題に対して，$\|\nabla F_{v,\mu_k}(x_v^k)\| < \tau_k$ を満たす x_v^k を求める．さらに，

$$v^k \in \mathrm{argmin} \quad \{F_{v,\mu_k}(x_v^k) - \|\nabla F_{v,\mu_k}(x_v^k)\| \cdot M(x_v^k) \; ; \; v \in V((S_k)^\circ)\}$$

を求める．ただし，

$$M(x_v^k) = \begin{cases} M & (x_v^k \in M), \\ M + \|x_v^k\| & (x_v^k \notin M), \end{cases}$$

とする．$x(k) = x_{v^k}^k$ とし，

$$A_k = F_{v^k,\mu_k}(x(k)) - \|\nabla F_{v^k,\mu_k}(x(k))\| \cdot M(x(k))$$

とする．

ステップ 2. $A_k = F_{v^k,\mu_k}(x(k))$, $p(x(k)) \geq 0$, $r(x(k)) \leq 0$ ならば，アルゴリズムを停止する．このとき，$x(k)$, A_k はそれぞれ問題 (MP) の最適解および最適値である．この条件を満たさないならば，ステップ 3 へ．

ステップ 3. $\bar{\eta}_1 = \eta_k$ とする．

a. v^k, $\bar{\eta}_i$ に対して次の制約なし凸最小化問題を考える．

$$\begin{cases} \text{minimize} & \Phi(x; v^k) = h(x, v^k) + g(x, \alpha_k), \\ \text{subject to} & x \in R^n. \end{cases}$$

ただし，$h(x, v^k) = -\langle v^k, x\rangle + 1$, $g(x, \alpha_k) = -\bar{\eta}_i \sum_{j=1}^{t_X} \log(-p_j(x)/\alpha_k)$ である．この問題の最適解を z^k，最適値を ω^k とする．

b. $\langle v^k, z^k\rangle \leq 1$ ならば，$\bar{\eta}_{i+1} = \rho\bar{\eta}_i$ とし，a へ．

c. $\langle v^k, z^k\rangle > 1$ ならば，

$$\begin{aligned} Z_{k+1} &= Z_k \cup \{z^k\}, \\ \alpha_{k+1} &= \xi|\max_{x\in Z_{k+1}} p(x)|, \\ \eta_{k+1} &= \min\{\bar{\eta}_i, \tau_k/D\} \\ \mu_{k+1} &= \begin{cases} B\mu_k & \theta_{v^k}(x(k)) > 0 \text{ の場合,} \\ \mu_k & \theta_{v^k}(x(k)) \leq 0 \text{ の場合,} \end{cases} \end{aligned}$$

とする．ただし、

$$\begin{aligned} D = \max \quad & \{| -\log(\frac{p_j(0)}{\alpha_{k+1}}) \\ & -\| -\frac{p_j(0)}{\alpha_{k+1}}\nabla p_j(0)\| \cdot \Delta(X)| \\ & ; \; j = 1, \ldots, t_X\} \end{aligned}$$

また，$S_{k+1} = \mathrm{co}\, Z_{k+1}$ とし，$V((S_{k+1})^\circ)$ を求める．$k \leftarrow k+1$ として，ステップ 1 へ戻る．

定理 4.1 アルゴリズム *IA-PB* により生成される点列 $\{v^k\}$ の任意の集積点 $\bar{v}$ に対して，$\bar{v} \in X^\circ$ が成立する．

ここで, X のコンパクト性より，

$$\begin{aligned} \min(RCP) &= \min_{x\in Y\cap \mathrm{bd}\, X} f(x) \\ &\geq \min_{x\in \mathrm{bd}\, X} f(x) > -\infty \end{aligned}$$

が成立するので，次の補題が成立する．

補題 4.1 任意の k に対して，

$$F_{v^k,\mu_k}(x_{v^k}^k) - \|\nabla F_{v^k,\mu_k}(x_{v^k}^k)\| \cdot M(x_{v^k}^k) \leq \min(RCP)$$

が成立する．

補題 4.2 $\lim_{k\to\infty} \theta_{v^k}(x(k)) = 0$.

定理 4.2 アルゴリズム *IA-PB* より生成される点列 $\{x(k)\}$ の任意の集積点は問題 (RCP) の最適解である．

系 4.1 $\lim_{k\to\infty} \mu_k\theta_{v^k}(x(k)) = 0$.

定理 4.2，系 4.1 より，

$$\lim_{k\to\infty} F(x(k), v^k, \mu_k) = \min(RCP)$$

が成立する．

5　おわりに

本研究では，非線形な関数で定義される逆凸制約をもつ凸関数最小化問題に対する内部近似法のアルゴリズムを提案した．さらに，各反復で解かれる問題 $(SP(v))$ に対してペナルティ関数を用いて制約なし凸最小化問題へ変換し，問題 (1) の目的関数に対しては障壁関数を用いて連続微分可能な関数へ変換した．さらに，その場合のアルゴリズムの収束性が保たれることを示した．また，数値例に対する計算結果は当日発表する．

参考文献

[1] R. Horst and H. Tuy: Global Optimization: Deterministic Approaches, Third, Revised and Enlarged Edition, Springer-Verlag, Berlin (1996).

[2] H. Konno, P.T. Thach and H. Tuy: Optimization on Low Rank Nonconvex Structures, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1997).