2000年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

信用リスクを考慮した特定業種・格付け群へのローン配分問題

02202750　東京理科大学　*貞兼　浩一朗　SADAKANE Koichiro
01405390　東京理科大学　生田目　崇　NAMATAME Takashi
01701440　東京理科大学　山口　俊和　YAMAGUCHI Toshikazu

1. はじめに

債務者が債務を履行できなくなる状態をデフォルトと呼び，資金提供者である銀行にとって，デフォルトに対してどのように備えるかは最も重要な関心事である．従来，わが国の金融機関では，デフォルトの可能性があるような企業には貸出を行わない建前があり，デフォルトにより被るリスク（信用リスク）は存在しないと思われてきた．しかし，バブル経済の崩壊と金利の自由化の進展とともに，金融機関はある程度の信用リスクを覚悟して，いかに収益をあげるかという新たなリスク管理の手法が必要となってきている．

本研究では，信用リスクを線形回帰モデル[1]と，推移確率行列を用いた格付け変更リスク[3]から算出する．さらに，ローンの正味現在価値や期待損失額といった目標水準をたて，目標計画法[2]を用いた特定業種・格付け群へのローン配分額決定モデルを提案する．

2. 信用リスクの推定

2.1. 線形回帰モデル

本研究では，各格付けに対する信用リスクを経済マクロデータによって推定することを考える．a 期における格付け j の信用リスク π_{ja} は，格付け j の経営困難数 d_{ja} を，格付け j の総企業数 D_{ja} で割った(1)式で定義する．

$$\pi_{ja}=\frac{d_{ja}}{D_{ja}} \tag{1}$$

π_{ja} を推定するために，信用リスクに影響を与える経済マクロデータとして，為替レート B_a，日経平均株価 $N225_a$，長期金利 E_aを取り上げる．為替レートは円高になると製品輸出価格の相対的上昇を招き，経営の悪化につながると考えられる．日経平均株価の上昇は信用リスク低下につながり，長期金利の上昇は好況期であるので，信用リスク低下につながると考えられる．(2)式の重回帰モデルについて，分散比や自由度調整済み決定係数などを考慮に入れた上で変数選択を行い，格付け j の信用リスクを推定する．

$$\pi_{ja}=\beta_{j0}+\beta_{j1}B_a+\beta_{j2}N225_a+\beta_{j3}E_a+\varepsilon_{ja} \tag{2}$$

2.2. 格付け変更リスクを考慮した信用リスク

本研究では，現時点の格付けAの企業が，次の期に格付けがAAに昇格したり，BBBに降格するという格付け変更の推移確率を推定する．格付けを状態とし，格付け間の推移確率を表現する推移確率行列を考える．業種によって格付け変更が頻繁に起こる業界と起こらない業界があることから，推移確率行列の推定にあたっては業種別の格付け分布を利用する．業種 i の a 期における格付けごとの企業数を(3)式で定義する．マルコフ性を仮定すると状態推移は(4)式で表される．(4)式の左辺と右辺の差の2乗和を最小にするような $\hat{P}^{(i)}=[\hat{p}^{(i)}_{jj'}]$ を【QP】により求める．

$$\boldsymbol{v}^{(i)}_a=(v^{(i)}_{a1},\cdots,v^{(i)}_{aJ+1}) \tag{3}$$

$$\boldsymbol{v}^{(i)}_{a+1}=\boldsymbol{v}^{(i)}_a P^{(i)} \tag{4}$$

(6), (7)式は，確率測度を満たすための制約条件である．$J+1$ は倒産状態であり，(8)式は倒産状態から非倒産状態はありえないことを制約している．これらの制約の下で，目的関数を最小にする$\hat{p}^{(i)}_{jj'}$を求める．

【QP】

$$\min \quad \sum_{a=1}^{A-1}\sum_{j'=1}^{J+1}(v^{(i)}_{a+1j}-\sum_{j=1}^{J+1}v^{(i)}_{aj}\hat{p}^{(i)}_{jj'})^2 \tag{5}$$

$$\text{s.t.} \quad 0\le \hat{p}^{(i)}_{jj'}\le 1 \tag{6}$$

$$\sum_{j'=1}^{J+1}\hat{p}^{(i)}_{jj'}=1 \tag{7}$$

$$\hat{p}^{(i)}_{J+1,J+1}=1 \tag{8}$$

【QP】から得られる推移確率行列を用いて，業種ごとの格付け変更リスクを考慮した信用リスクを算出する．t を将来時点を表す添え字とすると，$\hat{\pi}'_{ijt}$（格付けへ変更を考慮した信用リスク）は，推移確率行列と線形回帰モデルで推定される信用リスクの積，つまり(9)式で表される．

$$\begin{bmatrix}\hat{\pi}'_{i1t}\\ \vdots\\ \hat{\pi}'_{iJt}\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{p}^{(i)}_{11} & \cdots & \hat{p}^{(i)}_{1J} & \hat{p}^{(i)}_{1,J+1}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \hat{p}^{(i)}_{J1} & \cdots & \hat{p}^{(i)}_{JJ} & \hat{p}^{(i)}_{J,J+1}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\pi}_{1t}\\ \vdots\\ \hat{\pi}_{Jt}\\ 1\end{bmatrix} \tag{9}$$

3. 提案するモデル

本研究では，(9)式で得られる信用リスクを考慮した，特定業種･格付けへのローン配分決定モデルを提案する．$i\ (i=1,\cdots,I)$ は業種，$j\ (j=1,\cdots,J)$ は格付け，$k\ (k=1,\cdots,K)$ はシナリオ，$t\ (t=1,\cdots,T)$ は期を示す添え字とする．例として $I=4, J=5, K=3, T=1,5$ として説明する．

【記号の定義】

w_k	シナリオ k が生起する確率
r_{kt}	シナリオ k における t 期の無リスク利子率
α_{ij}	業種 i 格付け j 群のスプレッド
λ_{ij}	業種 i 格付け j 群の元本回収率
$\hat{\pi}'_{ijt}$	業種 i 格付け j 群の t 期の信用リスク
s_{ijt}	業種 i 格付け j 群の t 期の生存確率
$NPV^{(T)}_{ijk}$	満期 T 期のローン正味現在価値
$F_{i\cdot}$	業種 i へのローン総額
$F_{\cdot j}$	格付け j へのローン総額
$F^{(T)}_{ij}$	満期 T 業種 i 格付け j 群のローン配分額

s_{ijt}を(10)式のように定義する．ただし，現時点の信用リスクは0なので，π'_{ij0}は0となる．

$$s_{ijt}=\prod_{t=0}^{t}(1-\hat{\pi}'_{ijt}) \tag{10}$$

$$\hat{\pi}'_{ij0}=0 \tag{11}$$

ここで，ローンのキャッシュフローを定義する．ローンは毎期，利息分だけ返済され，元本は最終期に返済されるものとする．よって，信用リスクを考慮したキャッシュフローの正味現在価値は(12)式のようになる．右辺は，ローンの配分額，満期に得られる元本を0期に割引いた値，各期に得られる利息の額と生存確率との積と，元本回収額と信用リスクの積との和の現在価値を表す．

$$\begin{aligned}NPV^{(T)}_{ijk}=&-F^{(T)}_{ij}+\frac{s_{ijT}F^{(T)}_{ij}}{\prod_{t=1}^{T}(1+r_{kt})}\\&+\sum_{t=1}^{T}\frac{s_{ijt-1}\hat{\pi}'_{ijt}(\lambda_{ij}F^{(T)}_{ij})+s_{ijt}(r_{kt}+\alpha_{ij})F^{(T)}_{ij}}{\prod_{t'=1}^{t}(1+r_{kt'})}\end{aligned} \tag{12}$$

信用リスクがない場合に得られるキャッシュフローの正味現在価値は，(13)式で表される．

$$\begin{aligned}NPV'^{(T)}_{ijk}=&-F^{(T)}_{ij}+\frac{F^{(T)}_{ij}}{\prod_{t=1}^{T}(1+r_{kt})}\\&+\sum_{t=1}^{T}\frac{(r_{kt}+\alpha_{ij})F^{(T)}_{ij}}{\prod_{t'=1}^{t}(1+r_{kt'})}\end{aligned} \tag{13}$$

期待損失額は信用リスクがない場合に得られる正味現在価値と信用リスクを考慮した正味現在価値の差に，シナリオの生起確率をかけた(14)式となる．

$$\sum_{k=1}^{3}w_k(NPV'^{(T)}_{ijk}-NPV^{(T)}_{ijk}) \tag{14}$$

ローン配分においては，正味現在価値や期待損失額といった相反する目標があり，これらの目標に対してバランスのとれたローン配分を考える必要がある．そこで，目標計画法を用いる．(16)式は，正味現在価値に関する目標制約式，(17)式，(18)式は，T 期ローンの期待損失額に関する目標制約式を表す．【GP】は，第一順位で正味現在価値を目標水準以上にし，第二順位で期待損失額を目標水準以下にするようにローン配分額を決定する定式化になっている．

【GP】

$$\min\ P_1d^-+P_2\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5}(d^{+(1)}_{ij}+d^{+(5)}_{ij}) \tag{15}$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{k=1}^{3}w_k\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5}(NPV^{(1)}_{ijk}+NPV^{(5)}_{ijk})+d^-\geq H \tag{16}$$

$$\sum_{k=1}^{3}w_k(NPV'^{(1)}_{ijk}-NPV^{(1)}_{ijk})-d^{+(1)}_{ij}\leq H^{(1)}_{ij} \tag{17}$$

$$\sum_{k=1}^{3}w_k(NPV'^{(5)}_{ijk}-NPV^{(5)}_{ijk})-d^{+(5)}_{ij}\leq H^{(5)}_{ij} \tag{18}$$

$$\sum_{i=1}^{4}(F^{(1)}_{ij}+F^{(5)}_{ij})=F_{\cdot j}\quad (j=1,\cdots,5) \tag{19}$$

$$\sum_{j=1}^{5}(F^{(1)}_{ij}+F^{(5)}_{ij})=F_{i\cdot}\quad (i=1,\cdots,4) \tag{20}$$

$$F^{(1)}_{ij},F^{(5)}_{ij}\geq 0\quad (i=1,\cdots,4)(j=1,\cdots,5) \tag{21}$$

$$d^-,d^{+(1)}_{ij},d^{+(5)}_{ij}\geq 0\quad (i=1,\cdots,4)(j=1,\cdots,5) \tag{22}$$

ただし，H，$H^{(T)}_{ij}$ は目標水準，d^-，d^+ は偏差変数，P_1，P_2 は順位係数とする．

4. おわりに

本研究では，信用リスクを考慮した，特定業種・格付け群へのローン配分決定モデルを提案した．線形回帰モデルと推移確率行列を利用して，格付け変更を考慮した信用リスクを算出した．さらに目標計画法を用いて，ローン配分モデルを提案した．現実にはローンの組換えが考えられるはずであるので，多期間を考慮したローン配分モデルに拡張することが今後の展開としてあげられる．

参考文献

[1] 木島正明編著: 「クレジットリスク」金融財政事情研究会(1998).

[2] 伏見多美雄, 福川忠昭, 山口俊和: 「経営の多目標計画」, 森北出版(1987).

[3] 高橋秀雄, 森平爽一郎: “信用リスク管理の展望–市場リスクとの統合されたポートフォリオアプローチ–”, 金融研究, pp.155–207 (1996).