2001年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

パネルデータに基づく日本国債市場分析

01605930 ゴールドマン・サックス証券会社　宮﨑浩一　MIYAZAKI Koichi

1. はじめに

本研究では，パネルデータに基づき日本国債市場の価格付けにおけるCIRモデルとVasicekモデルとの比較分析を行う．カルマンフィルターによる推定法を採用する場合，CIR モデルの推定においては，通常 Geyer and Picheler [1999]のように平均と分散に関するモーメント情報だけを非心カイ二乗分布に一致させた正規分布を用いるため，近似することなくカルマンフィルターが適用できる Vasicek モデルと同じ設定で直接比較することはできない．そこで，推移確率の分布形を仮定すること無くパラメータ推定が行えるセミパラメトリック推定法を提案する．また，このセミパラメトリック推定が GMM を用いて容易に行えることも示す．実証分析においては，日本国債の 1 年から 20 年までの 1 年毎の時系列データから構成されるパネルデータを用いて，GMM に基づくセミパラメトリック推定法により CIR モデルと Vasicek モデルとの比較分析を行う．

2. セミパラメトリック推定法

1 ファクター CIR モデルを取り上げ，擬似尤度推定関数を用いたセミパラメトリックな確率微分方程式のパラメータ推定法を示す．1 ファクター CIR モデルとそれに基づく価格式を記し，債券価格データからセミパラメトリックにパラメータ推定を行うための擬似尤度推定関数を示す．次に，このような推定関数は，GMM 推定と一致することを示す．更に，2 ファクターモデルに拡張した場合の推定法も与える．証明は，発表当日紹介する．

1 ファクター CIR モデル

$$dX_t = \kappa(\theta - X_t)dt + \sigma_1\sqrt{X_t}\,dZ_t, \quad (1)$$

現時点を時刻 t とした場合に，時刻 $t+T$ において額面 1 が支払われる割引債の価格は，

$$P_t(T) = A(T)\exp(-B(T)X_t), \quad (2)$$

ここで，
$$A(T) = \left(\frac{2\phi_1\exp(\phi_2 T/2)}{\phi_4}\right)^{\phi_3} \quad (3)$$

$$B(T) = \frac{2(\exp(\phi_1 T)-1)}{\phi_4}, \quad (4)$$

$$\phi_1 = \sqrt{(\kappa+\lambda)^2 + 2\sigma^2},\quad \phi_2 = \kappa+\lambda+\phi_1,$$

$$\phi_3 = 2\kappa\theta/\sigma^2 \quad \phi_4 = 2\phi_1 + \phi_2(\exp(\phi_1 T)-1)$$

時刻 $t+T$ に満期となる割引債の時刻 t における複利利回りは，

$$\begin{aligned} Y_t(\alpha,\beta,\sigma,T) &= -\frac{\log P_t(\alpha,\beta,\sigma,T)}{T} \\ &= -\frac{\log A(\alpha,\beta,\sigma,T)}{T} + \frac{B(\alpha,\beta,\sigma,T)}{T}X_t \end{aligned} \quad (5)$$

と定義され，X_t のアフィン関数となる．

ここで，記法の繁雑さを避けるため，

$\kappa\theta = \alpha$，$-\kappa = \beta$ と置いた．

モデル(1)，(5)の離散化は，

$$X_i - X_{i-1} = \alpha + \beta X_{i-1} + h_{i,1} \quad (6\text{-A})$$

$$E[h_{i,1}] = 0,\ E[h_{i,1}^2] = \sigma^2 X_{i-1} \quad (6\text{-B})$$

$Y_i = \widetilde{A} + \widetilde{B}X_i + h_{i,2}$ (6-C)

ここで，$\widetilde{A} = -\dfrac{\log A(\alpha,\beta,\sigma,T)}{T}$ 等とおき，

$h_{i,2}$，$h_{i,1}$ は正規分布に従う独立な観測誤差とする．

Proposition1　パラメータの最適結合疑似尤度推定方程式

$$\sum_{i=1}^{T}\left\{\frac{1}{C}\begin{pmatrix} -\widetilde{k}_{i,1}^2 h_{i,1} + \widetilde{h}_{i,1}^3 k_{i,1} \\ -E[X_{i-1}|F_{i-1}](\widetilde{k}_{i,1}^2 h_{i,1} - \widetilde{h}_{i,1}^3 k_{i,1}) \\ -E[-2\sigma X_{i-1}|F_{i-1}](\widetilde{h}_{i,1}^3 h_{i,1} - \sigma^2 X_{i-1} k_{i,1}) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{E[h_{i,2}^2|F_i]}\begin{pmatrix} E[\partial\alpha|F_i] \\ E[\partial\beta|F_i] \\ E[\partial\sigma|F_i] \\ E[\partial\lambda|F_i] \end{pmatrix} h_{i,2}\right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ここで，$E(h_{i,1}k_{i,1}|F_{i-1}) = E(h_{i,1}^3|F_{i-1}) = \widetilde{h}_{i,1}^3$，$E[k_{i,1}^2|F_{i-1}] = \widetilde{k}_{i,1}^2$，$C = \sigma^2 X_{i-1}\widetilde{k}_{i,1}^2 - (\widetilde{h}_{i,1}^3)^2$，

$E[\partial\alpha|F_i] = E\left[-\dfrac{\partial\widetilde{A}}{\partial\alpha} - \dfrac{\partial\widetilde{B}}{\partial\alpha}|F_{i-1}\right]$ 等とする．

Proposition2

推定関数として以下の f_i（2 ファクター CIR モデルのパラメータ推定には，$f_i^{(2)}$）を用いれば，GMM の推定方程式と最適結合疑似尤度推定方程式は一致する．

$$f_i = \begin{pmatrix} h_{i,1} & h_{i,1}X_{i-1} & h_{i,1}^2 - \sigma^2 X_{i-1} & h_{i,2} \end{pmatrix}',$$

$$f_i^{(2)} = \begin{pmatrix} h_{i,1} & h_{i,1}X_{i-1} & h_{i,1}^2 - \sigma^2 X_{i-1} & h_{i,2} & h_{i,1}^{(2)} & h_{i,1}^{(2)}X_{i-1}^{(2)} & h_{i,1}^{(2)2} - \sigma^{(2)2}X_{i-1}^{(2)} & h_{i,2}^{(2)} \end{pmatrix}'$$

ここで，サフィックス (2) が付くものは第 2 ファクターに関するものである．

3. 実証分析

イールドカーブの全ての年限に関する時系列データ（93 年 1 月～96 年 12 月までの，1 年債から 20 年債までの 1 年毎のデータ）を用いて推定したパラメータ推定値と各年限の時系列データのみを用いて推定したパラメータ推定値とを比較した場合に CIR モデルの方が Vasicek モデルよりも差異が小さくなる．このため，全年限にわたり無裁定条件を満たすような推定利回りと実際の利回りとの乖離は，概して CIR モデルの方が Vasicek モデルよりも小さい結果となった．分析結果の詳細は当日紹介する．

参考文献

Geyer, A. and S. Pichler, A State-Space Approach to Estimate and Test Multifactor Cox-Ingersoll-Ross Models of the Term Structure, The Journal of Financial Research, Vol XXII,No.1 (1999), 107-130.