2001年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

協力ゲームにおける非対称な解とその応用†

02302264　大阪大学大学院　*鶴見 昌代　TSURUMI Masayo
（非会員）　大阪大学大学院　山形 英顕　YAMAGATA Hideaki
01307844　大阪大学大学院　谷野 哲三　TANINO Tetsuzo
01009544　大阪大学大学院　乾口 雅弘　INUIGUCHI Masahiro

1. はじめに

協力ゲームにおける解に，Shapley 値や Banzhaf 値がある．これらは，それぞれ各順列または各提携が等確率に成立するという仮定に基づいた，各プレイヤーの限界貢献度の期待値と考えることができる．また，投票が行われる状況においては，公正な投票システムの構築のためにも各意思決定主体の発言力を客観的に導くことが重要である．投票が行われる状況を協力ゲームとして定式化したものが投票ゲームであり，プレイヤーの発言力を反映させる指数として，Shapley/Banzhaf 値を投票力ゲームに適用した Shapley-Shubik/Banzhaf 指数が考えられている．

しかし，実際には各順列または各提携が確率で成立するとは限らない．したがって，各順列または各提携が等確率で生じない場合の解概念を考える必要がある．一般のゲームにおけるこのような意味での非対称な解概念には，確率値（the probablistic value）[6] がある．この解は，各プレイヤーが提携に参加する確率が異なる場合に適用できる．また，投票ゲームにおいては，各意思決定主体や実際に生じる議案などのイデオロギーから選好空間を形成し，この選好空間に基づく非対称な指数が考えられている [4, 5]．選好空間に基づいて日本の政党の投票力を測った代表的な研究には，小野・武藤 [3] によるものがある．しかし，この方法では，選好空間をどのように構成するか，どの次元まで考慮するかなどの問題がある．

そこで，近年，松井・上原 [2] が選好空間を導入せずに導くことができる非対称な投票力指数を提案し，その指数を公理化した．この指数は，勝利提携に含まれないプレイヤーは発言力を持たないと考えることにより，各勝利提携での Shapley 指数を求め，この指数にその勝利提携が生じる確率/重みを乗じたものの和として定義される．松井らは，実際に参議院で生じた賛成/反対のパターンが生じる確率を，賛成/反対の提携が生じる確率とみなし，この指数を応用した．また，遠藤ら [1] は，これと同様に各勝利提携での Banzhaf 指数に勝利提携が生じる確率/重みを乗じたものの和を非対称投票力指数とし，1998 年や 1999 年の参議院の投票力を測定した．遠藤らによる指数も，松井らの公理と似た公理化が行えるものと考えられる．したがって，これらの指数は，その公理の妥当性を認めるときに，一つの合理的な指数として考えることができる．しかしながら，これらの指数は各プレイヤーの限界貢献度の期待値ではない．

本研究では，各順列または各提携などといった限界貢献度の基準が確率分布に従って生じる場合には，各プレイヤーの限界貢献度の期待値となるような非対称なゲームの値を考える．まず，Shapley 値や Banzhaf 値が各順列や提携を基準としたプレイヤーの限界貢献度の期待値であることに着目して，順列や提携を含むような基準の概念を考える．また，これらの基準における各プレイヤーの限界貢献度の概念を導入する．これは，各基準に基づくゲームの差分と考えられる．各基準が生じる確率や各基準に対する重みにその基準におけるプレイヤーの限界貢献度を乗じたものの和を限界貢献度の加重和として提案する．さらに，これを全体合理性を満たすように基準化したものを新しい解として提案し，限界貢献度型非対称解あるいは単に限界型非対称解とよぶ．これらの概念によって，Shapley 値や Banzhaf 値を統合的に取り扱うことができる．限界貢献度の加重和/限界型非対称解がもつ性質を明らかにする．このように考えた限界貢献度の加重和/限界型非対称解を投票ゲームにも導入し，加重和指数/限界型指数とよぶ．また，限界型非対称解において，基準が順列/提携になるときには，非対称な Shapley/Banzhaf 値を表す．これを限界型 Shapley/Banzhaf 値とよぶ．非対称 Banzhaf 値と確率値の関係を示すことができる．このように考えた限界型 Shapley/Banzhaf 値を投票ゲームに導入し，限界型 Shapley-Shubik/Banzhaf 指数とみなす．さらに，松井らや遠藤らと同様に，実際に参議院で生じた賛成/反対のパターンが生じる確率を，賛成/反対の提携が生じる確率とみなすことにより，限界型 Banzhaf 指数を用いて，実際の日本の参議院における政党の影響力を評価する．

2. 協力ゲームと投票ゲーム

$N=\{1,2,\ldots,n\}$ をプレイヤーの集合とし，N のべき集合を $P(N)$ と書く．このとき，$v(\emptyset)=0$ を満たす $v:P(N)\to\mathbb{R}$ は，プレイヤーの集合 N をもつ協力ゲームと考えられる．また，全単射 $\pi:N\to N$ は，プレイヤーの順列を表す．プレイヤーの順列の集合を $\Pi(N)$ と書く．

プレイヤーの提携 S に関する限界貢献度 $C_i(v)(S)$ および順列 π に関する限界貢献度 $m_i(v)(\pi)$ はつぎのように定義できる．

$$C_i(v)(S)=v(S\cup\{i\})-v(S\backslash\{i\}),$$

$$m_i(v)(\pi)=v(P(\pi,i)\cup\{i\})-v(P(\pi,i)).$$

ただし，$P(\pi,i)=\{j\in N\mid \pi(j)<\pi(i)\}$ とする．つぎで定義される $\phi_i(v)$ と $\beta_i(v)$ は，それぞれゲーム v におけるプレイヤー i の Shapley 値，絶対 Banzhaf 値とよばれる．

$$\begin{aligned}\phi_i(v) &= \sum_{\pi\in\Pi(N)}\frac{1}{n!}\cdot m_i(v)(\pi),\\ \beta_i(v) &= \sum_{S\in P(N)}\frac{1}{2^n}\cdot C_i(v)(S).\end{aligned}$$

すなわち，Shapley/絶対 Banzhaf 値は，各順列/提携が生じる確率が等しいと考えたときの限界貢献度の期待値といえる．また，$\hat{\beta}_i(v)=\{v(N)/\sum_{j\in N}\beta_j(v)\}\cdot\beta_i$ は（正規化）Banzhaf 値とよばれる．

定義 1 [6] $p^i:P(N\backslash\{i\})\to[0,1]$ をプレイヤー i を含まない提携の集合上の確率分布とする．p^i が与えられたときのゲーム v におけるプレイヤー i の確率値（the probablistic value）はつぎで定義される．

$$\psi_i(v)=\sum_{S\in P(N\backslash\{i\})}p^i(S)\cdot C_i(v)(S).$$

---

†この研究は，日本学術振興会特別研究員奨励費による援助を一部受けています．

任意の $S \in P(N)$ に対して $v(S) \in \{0,1\}$ で，かつ任意の $S \subseteq T$ を満たす $S,T \in P(N)$ に対して $v(S) \leq v(T)$ で，$v(N)=1$ を満たす協力ゲームは，投票ゲームとよばれる．投票ゲームに適用した Shapley/Banzhaf 値は Shapley-Shubik/Banzhaf 指数と呼ばれる．

3. 限界貢献度に基づく非対称解

順列や提携などのように，プレイヤーの限界貢献度の基準となりうるものを一般に x と表し，基準 x の集合を X と表す．このとき，貢献度を考える上で基礎となるように適当な関数 $f_i : X \to P(N)$ を考えたとき，i の x に関する限界貢献度 $D_i^X(v)(x)$ を $D_i^X(v)(x) = v(f_i(v) \cup \{i\}) - v(f_i(v) \backslash \{i\})$ で定義する．限界貢献度 $D_i^X(v)(x)$ は，$X=\Pi(N)$ ととったとき $D_i^{\Pi(N)}(v)(\pi) = v(P(\pi,i) \cup \{i\}) - v(P(\pi,i))$ となり，$X=P(N)$ ととったとき $D_i^{P(N)}(v)(S) = v(S \cup \{i\}) - v(S \backslash \{i\})$ となる．また，任意の $x \in X$ に対して $p^X(x) \geq 0$ を満たす $p^X : X \to [0,1]$ を X 上のプロファイルと考える．このようなプロファイルは，各基準に対する重みを表す関数とみなすことも可能であるし，各基準が生じる確率を表す関数として考えることもできる．限界貢献度とプロファイルに基づく非対称な協力ゲームの解をつぎのように定義する．

定義 2 つぎを満たす $\eta_i(v)$ を X と p^X が与えられたときのゲーム v における $i \in N$ の限界貢献度の加重和とよぶ．

$$\eta_i^X(v)(p^X) = \sum_{x \in X} p^X(x) \cdot D_i^X(v)(x). \tag{1}$$

また，限界貢献度の加重和 $\eta_i^X(v)(p^X)$ に対して，つぎのように導かれる $\hat{\eta}_i^X(v)$ を限界貢献度型非対称解あるいは単に限界型非対称解とよぶ．

$$\hat{\eta}_i^X(v)(p^X) = \frac{v(N)}{\sum_{j \in N} \eta_j(v)(p^X)} \cdot \eta_i(v)(p^X). \tag{2}$$

また，与えられたゲーム v が投票ゲームであるとき，$\eta_i(v)(p^X)$，$\hat{\eta}_i(v)(p^X)$ をそれぞれ加重和指数，限界型指数とよぶ．

このように定義される限界貢献度の加重和や限界型非対称解は，単調性などの合理的な性質をもつ．これらの性質や確率値との関係などについては，当日紹介する．

ここで任意の $x \in X$ に対して $p^X(x)$ が等しい場合をつぎのように定義する．

定義 3 プロファイル $p^X(x)$ が任意の $x \in X$ に対して等しい値をとるとき，対称であるという．限界貢献度の加重和/限界型非対称解は，対称なプロファイルが与えられたとき対称であるという．とくに，プロファイル p^X が $\sum_{x \in X} p^X(x) = 1$ を満たすならば，限界貢献度の加重和はつぎが成り立つとき対称である．

$$\eta_i^X(v)(p^X) = \sum_{x \in X} \frac{1}{|X|} \cdot D_i^X(v)(x).$$

注意 1 $\Pi(N)$ と $p^{\Pi(N)}$ が与えられたとき，加重和限界貢献度と限界型非対称解は一致する．

また，X の範囲を制限することによって，つぎのような定義が得られる．

定義 4 $\Pi(N)$ と $p^{\Pi(N)}$ の限界型非対称解を限界型 Shapley 値とよぶ．すなわち，

$$\eta_i^{\Pi(N)}(v)(p^{\Pi(N)}) = \sum_{\pi \in \Pi(N)} p^{\Pi(N)}(\pi) \cdot m_i(v)(\pi).$$

定義 5 $P(N)$ と $p^{P(N)}$ が与えられたときの加重和限界貢献度/限界型非対称解を Banzhaf 型加重和限界貢献度/限界型 Banzhaf 値とよぶ．すなわち，i の Banzhaf 型加重和限界貢献度 $\eta_i^{P(N)}(v)(p^{P(N)})$ はつぎのように表される．

$$\eta_i^{P(N)}(v)(p^{P(N)}) = \sum_{S \in P(N)} p^{P(N)}(S) \cdot C_i(v)(S).$$

これらの解には，つぎのような性質がある．

注意 2 限界型 Shapley/Banzhaf 値は，プロファイルが $\sum_{x \in X} p^X(x) = 1$ を満たし，かつ対称であるとき，通常の Shapley/Banzhaf 値に一致する．

注意 3 Banzhaf 型加重和限界貢献度は，プロファイルが $\sum_{x \in X} p^X(x) = 1$ を満たすならば，任意の $(i,S) \in N \times P(N \backslash \{i\})$ に対して $p^i(S) = p^{P(N)}(S) + p^{P(N)}(S \cup \{i\})$ とすると確率値に一致する．

4. 日本の参議院における各政党の影響力評価

松井ら [2] や遠藤ら [1] と同様に，議案へ賛成する政党の集合あるいは反対の政党の集合を提携とみなし，実際に生じた賛成や反対の態度から各提携の生じる確率を導き，提案した加重和 Banzhaf 指数，限界型 Banzhaf 指数を適用し，他の指数による数値と比較した．計算結果については，当日紹介する．

5. おわりに

限界貢献度の基準と限界貢献度の概念を拡張することにより，各基準に基づく限界貢献度と各基準に対する重み/確率などから得られる一般的な解を提案した．提案した解と従来の解との関係などの性質を明らかにした．基準となるものの集合が提携の集合となるときの解を投票ゲームに適用することにより，実際の日本の参議院の政党の影響力を測定し，他の解による数値と比較した．

参考文献

[1] 遠藤，鈴木，穴太，選考空間を構成せずに議案行動より直接計算する非対称 Banzhaf 指数，京都大学数理解析研究所研究集会「不確実なモデルによる動的計画理論の課題とその展望」(2001 年 2 月 7 日口頭発表)．

[2] T. Matsui and Y. Uehara, A note on asymmetric power index for voting games, 日本 OR 学会 2000 年度秋季研究発表会アブストラクト集.

[3] R. Ono and S. Muto, Party power in the house of councilors in Japan: an application of the non-symmetric Shapley-Owen index, JORSJ 40 (1997) 21–32.

[4] G. Owen, Political games, Nav. Res. Log. Quart. 18 (1971) 345–355.

[5] L.S. Shapley and M. Shubik, Chap. 3: A method for evaluating the distribution of power in a committee system, in: "The Shapley value," edited by A.E. Roth, Cambridge Univ. Press, pp. 41–48, 1988 (originally appeared in 1954).

[6] R.J. Weber, Chap. 7: Probabilistic values for games, in: "The Shapley value," edited by A.E. Roth, Cambridge Univ. Press, pp. 101–119, 1988.