

クールノー・モデルにおける情報獲得と相互エントロピー

入会申請中 東京理科大学 *富山 陽平 TOMIYAMA Yohei
01605890 東京理科大学 松岡 隆志 MATSUOKA Takashi
入会申請中 東京理科大学 大下 健太郎 OHSHITA Kentaro
非会員 東京理科大学 大矢 雅則 OHYA Masanori

1. はじめに

企業は、市場において相手の戦略を予測し、自らの戦略を決定する。この「予測」という行動は、相手の戦略に対する何らかの情報を獲得することによって可能となる。

本論文では、ベイジアン・クールノー・モデル [1] を解析する。われわれは、エントロピー (情報量) を用いて、企業が相手の戦略に関して獲得した情報を定量的に評価し、企業の期待利得の変化を情報獲得 (情報量) との観点から特徴付ける。

2. 2種類の生産コストを考慮した ベイジアン・クールノー・モデル

企業1と企業2が同種の製品を生産するとして、各企業の生産量を q_1, q_2 としたとき、その製品の価格 P は、 $P = a - (q_1 + q_2)$ (a は正の定数) であるとする。ここで、その製品の生産コストがハイコスト c_H とローコスト c_L ($c_H > c_L$) の2つをとりうるケースを考えよう。すなわち、企業 i ($i = 1, 2$) の生産コスト c_i の集合 $T_i = \{c_i\} = \{c_H, c_L\}$ をタイプ空間として用意し、 c_i の生起確率 $p(c_i)$ は、 $p(c_i = c_H) = \alpha$, $p(c_i = c_L) = 1 - \alpha$ ($0 \leq \alpha \leq 1$) とする。このとき、企業 i の、企業 j ($j = 1, 2, i \neq j$) の生産コスト c_j に対する確率的信念とは条件付き確率分布 $\{p(c_j|c_i)\}$ のことである。たとえば、 $p(c_j = c_H|c_i = c_H) = \theta$ ($0 \leq \theta \leq 1$) と与えると、ベイズの定理から $\{p(c_j|c_i)\}$ と $\{p(c_i|c_j)\}$ のすべての条件付き確率は α, θ で表される。いま、 α を固定して、このモデルにおける企業 i のベイジアン・ナッシュ均衡 (生産量) を求めると、それは生産コスト c_i および θ に依存する。よって、それを $q_i^*(c_i; \theta)$ と書けば、ナッシュ均衡から得られる企業 i の利得 U_i は、 θ の関数として、次のように計算される。

$$U_i(\theta) = \sum_{c_i \in \{c_H, c_L\}} p(c_i) \pi_i(c_i; \theta) \quad (2.1)$$

ここで、

$$\pi_i(c_i; \theta) = \sum_{c_j \in \{c_H, c_L\}} p(c_j|c_i) q_i^*(c_i; \theta) \times [a - \{q_i^*(c_i; \theta) + q_j^*(c_j; \theta)\} - c_i] \quad (2.2)$$

である。たとえば、 $\alpha = \frac{1}{2}, a = 1000, c_H = 900, c_L = 800$ としたとき、

$$U_i(\theta) = \frac{5000(1 + 2\theta + 2\theta^2)}{(1 + 2\theta)^2} \quad (2.3)$$

ところで、 θ ($0 \leq \theta \leq 1$) は、企業 i が c_i を知ったことによって、企業 j の生産コストを予測するときの精度を表している (例えば、 $\theta = 1, \theta = \alpha$ のケースを考察せよ)。よって、(2.1) で与えられる $U_i(\theta)$ は、予測の精度に依存して、その期待利得が変化することを示している。このとき、情報理論の視点を用いれば、 c_i から得られる c_j の予測に関する情報を、 θ の関数として定量的に評価することができる [2,3]。本研究の目的は、企業 i が c_i を知ることによって得られる c_j の情報量の変化と、期待利得 $U_i(\theta)$ の変化との関連を考察し、期待利得を情報量によって特徴づけることにある。

3. 獲得した情報量と相互エントロピー

確率変数 X, Y とその生起確率分布 p, q を

$$X = \{x_1, \dots, x_n\} \quad p = \{p_1, \dots, p_n\}$$

$$Y = \{y_1, \dots, y_m\} \quad q = \{q_1, \dots, q_m\}$$

とするとき、系 $(X, p), (Y, q)$ が有する情報量 (エントロピー) は、

$$S(p) = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i, \quad S(q) = - \sum_{i=1}^m q_i \log q_i$$

と与えられる (ただし、 $0 \log 0 = 0$)。いま、 (X, p) と (Y, q) の複合事象 $(X \times Y)$ の同時確率分布を $r_{ij} = p(x_i, y_j)$ とした場合、複合事象系 $(X \times Y, r_{ij})$ の相互エントロピー $I(X, Y)$ は、

$$I(X, Y) = \sum_{i,j} r_{ij} \log \frac{r_{ij}}{p_i q_j}$$

と与えられる。これは、 $(X, p), (Y, q)$ の2つの完全事象系で共有する情報量と考えることができる。ここで、入力系 (X, p) から出力系 (Y, q) に系が変化する視点に立つと、入力状態の確率分布 p から出力状態の確率分布 q への変換を表す遷移確率行列 $[p(y_j|x_i)]$ を用いて、 p と q の同時確率分布を表すことができる。すなわち、 $q_j = \sum_i p(y_j|x_i) p_i$ であり、 $r_{ij} = p(y_j|x_i) p_i$ となる。この遷移確率行列を情報理論ではチャンネルと呼び、 Λ^* で表す。このとき、入力系 X の分布 p とチャンネル Λ^* に関する相互エントロピー $I(p; \Lambda^*)$ は、

$$I(X, Y) = I(p; \Lambda^*) = \sum_{i,j} p(y_j|x_i) p_i \log \frac{p(y_j|x_i) p_i}{p_i \sum_k p(y_j|x_k) p_k} \quad (3.1)$$

と表される。これは、入力系のもつ情報量がどれだけ正確に、チャンネルを通して出力系に移されたかを示す情報量と解釈できる。

この情報理論のスキームをクールノー・モデルにあてはめてみよう。いま、企業 i が自らの生産コスト c_i を元に、企業 j の生産コスト c_j を予測する場合を考えよう。このとき、企業 j のタイプ空間 $(T_j, p(c_j))$ を入力系、企業 i のタイプ空間 $(T_i, p(c_i))$ を出力系とすると、 $p(c_j)$ から $p(c_i)$ への遷移確率行列 $[p(c_i|c_j)]$ が、企業 j から企業 i へのチャンネル $\Lambda_{j \rightarrow i}^*$ に対応する。すなわち、このチャンネルを通して企業 i は、企業 j の生産コストに関する情報を受け取っていると考えることができ、その情報量は式 (3.1) の相互エントロピーとして求められる。

$$I(p(c_j); \Lambda_{j \rightarrow i}^*(\theta)) = \sum_{c_i, c_j} p(c_i|c_j) p(c_j) \log \frac{p(c_i|c_j)}{p(c_i)} \quad (3.2)$$

上の式では、 $[p(c_i|c_j)]$ が θ ($0 \leq \theta \leq 1$) で与えられる、すなわち、チャンネル $\Lambda_{j \rightarrow i}^*$ が θ に依存するので、そのことを明記するためにチャンネル $\Lambda_{j \rightarrow i}^*(\theta)$ と書いた。2節で、 θ は相手企業のコスト予測の精度に関するパラメータとなっていると書いたが、式 (3.2) からわかるように、 θ の値に依存して企業 i

が、 c_j に関して受け取ることのできる情報の量も変化する。すなわち、情報理論の観点を導入すれば、企業 i が自らの生産コスト c_i を元に、企業 j の生産コストを予測するという図式は、チャンネルを通して受け取る情報の量に依存してその精度を論じるという図式に書き換えることが可能となるのである。

4. 期待利得の変化と相互エントロピーの関連

本節では、式 (2.3) で与えたモデルにおいて、利得の変化とエントロピーの関連を定量的に議論する。図 1 は、企業 i の期待利得 $U_i(\theta)$ の θ に対する変化を示したものである。また、図 2 は式 (3.2) において、 $\alpha = \frac{1}{2}$ としたときの相互エントロピー $I_{\alpha=\frac{1}{2}}(p(c_j); \Lambda_{j \rightarrow i}^*(\theta))$ (以下、簡単に $I_{i,\alpha=\frac{1}{2}}(\theta)$ と書く) の変化を示したものであり、 $I_{i,\alpha=\frac{1}{2}}(\theta)$ は次に示す式 (4.1) で与えられる (ただし、対数の底は 2)。

$$I_{i,\alpha=\frac{1}{2}}(\theta) = 1 + \theta \log \theta + (1 - \theta) \log(1 - \theta) \quad (4.1)$$

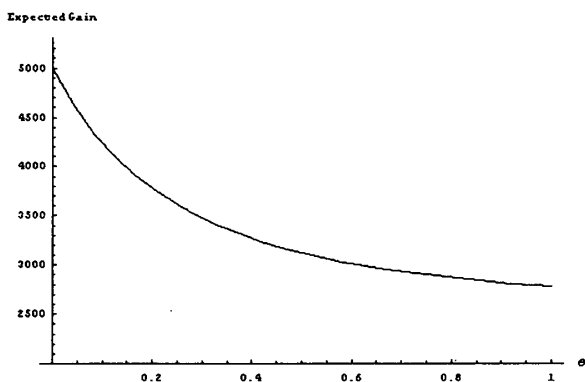


図 1: 企業 i の期待利得 $U_i(\theta)$ の変化

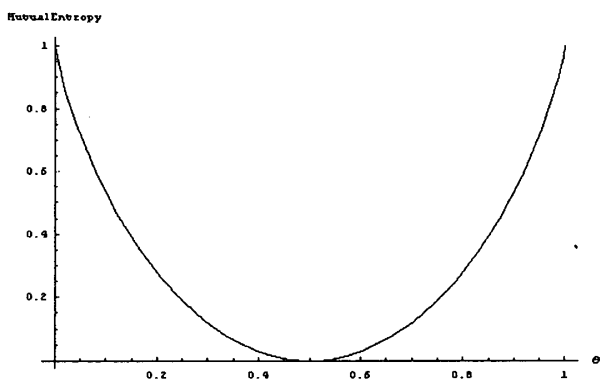


図 2: 企業 i が獲得する相互エントロピー $I_{i,\alpha=\frac{1}{2}}$ の変化

まず、図 1 の利得の変化を考察しよう。 θ が小さくなるということは、お互いに違うコストをもつという状況が生じることに對する予測の精度が高くなっていくことを意味している。このとき、期待利得も高くなっていくことがわかる。逆に、 θ が大きくなるということは、お互いに同じコストをもつという状況が生じることに對する予測の精度が高くなっていくことを意味するが、このとき、期待利得は単調に減少する。すなわち、それぞれの生産コストが異なる状況において、

その情報が 2 つの企業にとって既知のものとなっているとき期待利得は最も大きく、逆に、その生産コストが等しいという情報が明らかなき期待利得は最も小さい。このような利得の変化は、どのような意味をもつか、相互エントロピーの変化と関連付けて考えてみよう。

(a) $\theta = 0, 1$ ($I_{i,\alpha=\frac{1}{2}}(\theta) = S(p(c_j))$) のとき

$\theta = 0, 1$ のとき、企業 i が受け取る相互エントロピーは $I_{i,\alpha=\frac{1}{2}}(0) = I_{i,\alpha=\frac{1}{2}}(1) = 1$ となるが、いま、企業 j の生産コストに関するエントロピーは $S(p(c_j)) = 1$ であるから、このとき、企業 i は企業 j の生産コストに関する情報をすべて獲得しているということが出来る。これは、企業 i が企業 j の生産コストを確実に予測できることに對應する。

(b) $\theta = \frac{1}{2}$ ($I_{i,\alpha=\frac{1}{2}}(\theta) = 0$) のとき

企業 i が受け取る相互エントロピーの値が 0 ということは、企業 i は自身の生産コストを確認しても、企業 j の生産コストに関する情報を何ら得ることができないことを意味する。ベイズの定理から、 c_i を確認したときの c_j に関する条件付確率は、このケースでは、すべて $p(c_j|c_i) = \frac{1}{2}$ と計算できるが、これは、 c_i を知ったあとの c_j に関する事後確率が事前確率と何ら変化していないということであり、よって、 c_i を知っても c_j に関する予測の精度はまったく向上しないことを意味する。予測の精度に変化が生じないということが、獲得する情報量が 0 ということで解釈できる。

(c) $0 < \theta < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < \theta < 1$ のとき

(a), (b) の結果からわかるように、相互エントロピーの値と、 c_i を知ったあとの c_j の事後確率における精度の間には、正の相関があることが予想されるが、 $0 < \theta < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < \theta < 1$ の領域において、 $\theta = \frac{1}{2}$ を境にして、 $\frac{1}{2} \rightarrow \theta \rightarrow 0, \frac{1}{2} \rightarrow \theta \rightarrow 1$ のそれぞれの θ の変化に対して、相互エントロピーは単調に増加していると考えることができ、予測の精度の変化と獲得した情報量の変化の整合性が示されている。

ここで、 $\theta = \frac{1}{2}$ を境に、 θ が小さくなるにつれて期待利得が増え、 θ が大きくなるにつれて利得が減ると捉えなおした上で、期待利得の変化と相互エントロピーの変化の関連を考察する。 $\theta < \frac{1}{2}$ において、情報の獲得量が増えるとともに期待利得が増えていることから、良い情報が獲得できているのだろうと考え、逆に、 $\theta > \frac{1}{2}$ において、情報の獲得量が増えるとともに、期待利得が減っていることから悪い情報を獲得しているのだろうと考えられる可能性がある。これを踏まえれば、良い情報を獲得している ($0 \leq \theta < \frac{1}{2}$) 状況において、情報量が ϵ 増えたときの期待利得の増加量は、悪い情報を獲得している ($\frac{1}{2} < \theta \leq 1$) 状況において、情報量が ϵ 増えたときの期待利得の減少量よりも大きいことがいえるだろう。

参考文献

- [1] R.Gibbons. Game Theory for Applied Economists, princeton University press, 1992
- [2] 大矢雅則, 松岡隆志. 複占市場における情報獲得と相互エントロピー, No. 1013, pp.28-40, 京都大学数理解析研究所講究録, 1997
- [3] 大下健太郎, 松岡隆志, 大矢雅則. ゲーム理論, その情報構造に関する一考察, pp.14-25, 電子情報通信学会, 2000