

競合環境の下で施設の質を考慮した最適配置問題

02005044 大阪大学
01005194 大阪大学
大阪大学
01013344 神戸芸術工科大学

*宇野 剛史 UNO Takeshi
石井 博昭 ISHII Hiroaki
斎藤 誠慈 SAITO Seiji
大角 盛広 OSUMI Shigehiro

1 はじめに

最適配置問題の一分野である競合施設配置問題の研究は、Hotelling [3] を先駆者として発展してきた。この問題は複数の企業が競合している状況において施設の利用者から獲得可能な利得または購買力を最大化する問題であり、利用者の施設選択における主な評価基準として施設・利用者間の距離がよく用いられてきた。距離に加えて施設の質的側面を評価基準の一つとして考慮したモデルとしては、Karkazis[4] の論文が挙げられる。また、Hakimi [2] は先手企業・後手企業の2種類の企業が交互に施設を配置する問題を考察し、Drezner [1] は平面上に施設を配置するモデルとして問題を考察した。これらの問題では、Stackelberg 均衡の概念を用いて解を定義している。

本研究では、利用者の施設に対する評価基準を施設・利用者間の距離と施設自身の勧誘力の積として表した。2点間の距離については、Euclid 距離 (l_2 -ノルム) と直角距離 (l_1 -ノルム) で定義される場合について考察する。そして、競合する先手企業・後手企業の2企業が交互に施設を配置する状況の下で、利用者から獲得可能な利得の最大化を目的とする問題について考察した。

2 モデルの構築と定式化

利用者が存在し各企業が施設を配置可能な集合を $S \in \mathbb{R}^2$ で与える。利用者の分布は S 内に存在する m 個の点の集合で表わされると仮定し、同じ点上に存在する利用者は1つの集団とみなす、ここで m はある有限の自然数である；以下では利用者の集団を「顧客」と呼ぶことにする。各顧客を $i \in I$ と指標を付ける、ここで、 $I = \{1, \dots, m\}$ は顧客の全体集合とする。各顧客 $i \in I$ について、顧客の存在する位置を $(x_i, y_i) \in S$ とおき、顧客の位置の集合を $X = \{(x_i, y_i) | i \in I\}$ で表わす。また、各顧客 $i \in I$ について、顧客の購買力

を $w_i \in [0, \infty)$ とおく。

各企業は各々 L 種類の施設を配置可能と仮定し、施設の種類の全体集合を $J = \{1, \dots, L\}$ とおくことにより施設の種類の $l \in J$ と指標を付ける、ここで、 L はある自然数とし、指標は施設の質的レベルの低い順に並び替えられている。施設には種類に応じて、顧客に対する勧誘指数、建設費の2つのデータが与えられているとし、各々 $k_l, C_l \in [0, \infty)$ とおく、ここで、これらのデータは以下の関係式を満たすとす：

$$\infty > k_1 > k_2 > \dots > k_L = 1,$$

$$0 \leq C_1 < C_2 < \dots < C_L < \infty.$$

競合する2企業について、先手企業と後手企業の施設を各々 A, B とおく。施設は S 内の点上に配置されるとし、各施設 $F \in \{A, B\}$ の配置された位置を $(x_F, y_F) \in S$ とおく。各企業が配置する施設 A, B の種類の指標を各々 $l_A, l_B \in J$ とおく。また、施設 F の施設の勧誘力、建設費を各々 k_F, C_F とおく。

顧客 i と施設 F との間の距離を d_{iF} とおく。2つの施設に対して、顧客は施設の勧誘力と施設までの距離の積が小さい施設のみ利用する、即ち、その顧客の購買力を全て獲得できると仮定する。また、2つの施設について距離が等しい場合には、顧客は先手企業の施設 A のみ利用すると仮定する。施設 F が獲得した顧客の指標集合を $N_F \subseteq I$ とおく、ここで、 N_F は次の関係式を満たす：

$$N_A \cup N_B = I, N_A \cap N_B = \emptyset.$$

本研究では、全顧客から得られる企業の売上は施設の獲得購買力の総数に比例すると仮定し、この比例係数を $\alpha \in (0, \infty)$ とおく。このとき、企業 A, B の施設配置問題は次の利得最大化問題 (P_A), (P_B) として定式化される：

$$P_A : \max_{\substack{(x_A, y_A) \in S \\ l_A \in J}} \alpha \sum_{i \in N_A} w_i - \beta \cdot C_A,$$

$$P_B: \max_{\substack{(x_B, y_B) \in S \\ l_B \in J}} \alpha \sum_{i \in N_B} w_i - \beta \cdot C_B,$$

ここで、 $\beta \in [0, \infty)$ は売上に対する建設費の重要度を意味する定数であり、 β の値が大きい程建設費を重視していることを表わす。

3 問題の解析

本節では、Euclid 距離により各点間の距離を与える場合についての解析を述べる。各企業の利得最大化問題 $(P_A), (P_B)$ を解くにあたって、各企業の採り得る施設の種類毎に場合分けを行う必要がある。各企業の施設配置は2つの施設 A, B の勧誘力の比較から以下の3つの場合に分けられる。

(i) $l_A = l_B$, 即ち、 $k_A = k_B$ のとき、この問題は Drezner [1] のモデルと同様に扱うことができる。

(ii) $l_A < l_B$, 即ち、 $k_A < k_B$ のとき、以下の定理が明らかに成り立つ：

定理 1 $l_A < l_B$ を仮定する。このとき、施設 A の最適配置は購買力の最も大きい点上に配置することであり、施設 B の最適配置は施設 A と同じ位置に施設を配置することである。

(iii) $l_A > l_B$, 即ち、 $k_A > k_B$ のとき、施設 B の獲得できる顧客の存在領域は $k_A d_{iA} > k_B d_{iB}$ と表わされ、以下のように変形できる：

$$\left(x - \frac{k_B^2 x_B - k_A^2 x_A}{k_B^2 - k_A^2} \right)^2 + \left(y - \frac{k_B^2 y_B - k_A^2 y_A}{k_B^2 - k_A^2} \right)^2 < \left(\frac{k_A k_B}{k_B^2 - k_A^2} d_{AB} \right)^2,$$

ここで、 d_{AB} は施設 A, B 間の距離を表わす。上式より、施設 B の獲得できる顧客の存在領域は、中心が施設 A, B の配置点を $k_A^2 : k_B^2$ で外分する点で、半径が施設 A, B 間の距離と $k_A k_B / (k_B^2 - k_A^2)$ の積であるような円の内部（境界を含まない）で与えられる。

次に、施設の配置場所に対する獲得顧客の集合に注目する。顧客の全体集合 I から任意の顧客を選択し、これらの顧客から部分集合を形成する。そして、この部分集合の顧客を包含する最小の半径を持つ円を考察する。このとき、これらは次の3つのいずれかにより表現される：

- 顧客の存在する点を中心とし、半径0の円、
- 顧客の存在する2点を直径とする円、

- 鋭角三角形を形成する顧客の存在する3点に対する外接円。

上記によって表現される円の数と N とおくと、 N は $O(m^3)$ で与えられる。各円に対して、円の内部に存在する顧客の購買力の和が多い順に指標として $n \in \{1, \dots, N\}$ を付ける。各円に対する中心及び円の内部に存在する顧客の集合を、各々 $c_n \in S, I_n \subseteq I$ とおく。このとき、次の定理が成り立つ：

定理 2 各施設が $l_A > l_B$ となるように固定されており、施設 A が既に配置されたとする。このとき、施設 B の最適な配置の位置の1つは施設 A の配置点と点 c_n を $k_B^2 - k_A^2 : k_A^2$ に内分する点であり、そのとき企業 B の獲得購買力の総和は $\sum_{i \in I_n} w_i$ で与えられる。ここで、 n は企業 B が点 c_n に施設を配置した時に I_n 上の全ての顧客を獲得できる点のうち、 n が最小の値をとる、即ち、獲得購買力の和が最大となる点を表わす。

また、定理 2 から施設 A の最適配置が点 c_n 上にあることが言え、各 c_n 上に施設 A を配置したときの施設 B の最適配置を求めることにより、各企業の最適配置を求めることができる。

4 おわりに

説明の詳細、及び直角距離の場合については当日の発表で述べる予定である。

参考文献

- [1] Z. Drezner: "Competitive Location Strategies for Two Facilities", *Regional Science and Urban Economics*, Vol.12, pp.485-493 (1982).
- [2] S. L. Hakimi: "On Locating New Facilities in a Competitive Environment", *European Journal of Operational Research*, Vol.12, pp.29-35 (1983).
- [3] H. Hotelling: "Stability in Competition", *The Economic Journal*, Vol.30, pp.41-57 (1929).
- [4] J. Karkazis: "Facilities Location in a Competitive Environment: A Promethee Based Multiple Criteria Analysis", *European Journal of Operational Research*, Vol.42, pp.294-304 (1989).