

行列ノルムによる一対比較行列からのウェイト推定

01007500 慶応義塾大学 * 小澤 正典 OZAWA Masanori
01104400 法政大学 加藤 豊 KATO Yutaka

1. はじめに

一対比較行列からウェイトを推定することを階層化意思決定法 (AHP) においては、各階層について数回ずつ実行する必要がある。一般にその推定法には、主に固有ベクトル法が用いられている。また、加藤・小澤 [3] が調和平均や一般平均を使用した方法も提案しているが、それらの方法は最小 2 乗法を利用したものであり、固有ベクトルを使用する方法とは異なっている。そこで、本研究では一対比較行列の残差行列のノルムを最小にする方法を提案し、固有ベクトル法の拡張について考察する。

2. 行列ノルム最小化法

一対比較行列からウェイトを推定するのに、一対比較行列 (A) の要素を a_{ij} 、推定ウェイトを w_i とし、推定するための行列 B の要素 b_{ij} を

$$b_{ij} = a_{ij} \cdot \frac{w_j}{w_i}$$

とする。このとき、この行列のノルムを最小にするつぎの問題を考える。

● ウェイト推定問題

$$\min_{w_k} \|B\| = \min_{w_k} \|(b_{ij})\| = \min_{w_k} \left\| \left(a_{ij} \cdot \frac{w_j}{w_i} \right) \right\|$$

○ ベクトル・ノルムによる行列ノルム (ノルム 1) を考える。

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

ここで、 $p \geq 1$ であり、 $p \rightarrow \infty$ の場合は最大値ノルムである。このとき、行列ノルムは

$$\|B\|_p = \max_x \frac{\|Bx\|_p}{\|x\|_p}$$

で与えられる。

定理 1 : 推定問題で、その行列ノルムを最小にする

るウェイト \hat{w}_i は

$$\hat{w}_i = (h_i)^{1-1/p} \left(\frac{1}{g_i} \right)^{1/p}$$

で与えられる。ここで、 $h^T = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ は行列 A の最大固有値に対応する固有ベクトルで、また $g^T = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ は行列 A^T の最大固有値に対応する固有ベクトルである。

$$Ah = \lambda h, \quad A^T g = \lambda g$$

また、 $p \rightarrow \infty$ のときには、 $\hat{w}_i = h_i$ である。

証明：略

この定理で、一対比較行列が整合性を満たすとき

$$a_{ij} = w_i/w_j$$

には、 $h_i = 1/g_i, i = 1, \dots, n$ となるので、推定ウェイトは、どんな p においても真のウェイトに一致する ($\hat{w}_i = w_i$)。このことは、行列ノルムを最小化することでウェイトを推定することが可能であり、 b_{ij} と 1 の差を計算することによる推定が必要がないことを示している。

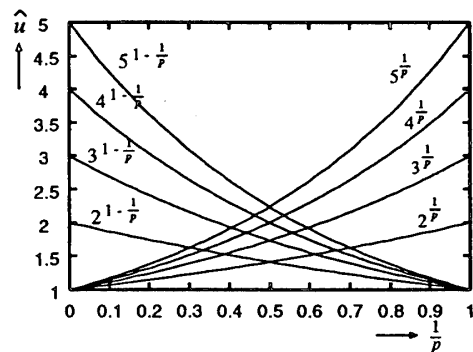


図 1 : p による値の変化

固有ベクトル法は、この問題において最大値ノルムを使用した方法であると考えてよい。一方、行列を転置してその固有ベクトルを求めその逆数を利用してウェイト推定する方法も可能である。これらの方法は、行列ノルムの取り方の違いとして理解することが可能である。ノルムとして最大ノルム ($p = \infty$) を使用すれば行列ノルムはその行和の最大値であるので、その推定ウェイトは固有ベクトルになり、1 ノルム ($p = 1$) を使用すれば行

列ノルムは列和の最大値となるので、転置した行列の固有ベクトルにおける各要素の逆数となる。

また、 $p = 2$ のユークリッドノルムを使用すると、そのウェイトは、固有ベクトルの要素と転置した行列の固有ベクトルの要素の逆数の幾何平均となる。したがって、従来のように最大値ノルムを使用して固有ベクトルを推定ウェイトとして使用するより、ユークリッドノルムを使用することが自然である。

系 1 : ある \hat{p} で、 $\hat{u}_i \geq \hat{u}_j$ であり、別の \tilde{p} でも、 $\tilde{u}_i \geq \tilde{u}_j$ となるならば、 $\tilde{p} \leq p \leq \hat{p}$ で、 $u_i \geq u_j$ となる。

証明 : 略

つまり、この p を変動することにより、推定ウェイトの順序は逆転することはない。

系 2 : ある \hat{p} で、 $\hat{u}_i \geq \hat{u}_j$ であり、別の \tilde{p} では、 $\tilde{u}_i \leq \tilde{u}_j$ となるときに、 p が

$$p = \frac{\tilde{p} (\log \hat{u}_i - \log \hat{u}_j) - \hat{p} (\log \tilde{u}_i - \log \tilde{u}_j)}{\log \hat{u}_i - \log \hat{u}_j + \log \tilde{u}_i - \log \tilde{u}_j}$$

$$= \frac{\log h_i - \log h_j}{\log h_i - \log h_j + \log g_i - \log g_j}$$

のとき、 $u_i = u_j$ となる。

証明 : 略

○ 行列 (b_{ij}) のノルム (ノルム 2) を

$$\|B\|_r = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}|^r \right)^{1/r}$$

とする。

定理 2 : ウェイトの推定問題でこの行列ノルムを最小にするウェイトは、整合性を持つときには真のウェイトと一致する。

証明 : 略

この場合でも行列ノルムを最小化することにより、ウェイト推定が可能である。

系 3 : 定理 2 における推定問題で、その推定ウェイトはつぎの方程式の解である。

$$u_i = \sqrt{\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (a_{ij} u_j)^r \right)^{1/r} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (a_{ij} u_j)^{-r} \right)^{-1/r}},$$

for $i = 1, 2, \dots, n$

証明 : 略

このウェイト推定法であると、そのウェイトは方程式の解として与えられるだけで、一対比較行列の要素だけで表現できない。しかし、この方程式

による漸化式を利用することにより、簡便にその解を計算することができる。この計算の手間は、固有ベクトルをベキ乗法で計算するのと同じ手間になる。

定理 3 : つぎの ℓ における漸化式において、初期点が解から十分近ければ、

$$u_i^{(\ell+1)} = \sqrt{\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (a_{ij} u_j^{(\ell)})^r \right)^{1/r} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (a_{ij} u_j^{(\ell)})^{-r} \right)^{-1/r}}$$

$\ell = 1, 2, \dots$

は、系 1 における解に 1 次収束する。

証明 : 略

このノルム 2 の方法における推定ウェイトは漸化式により得られるが、それは相加平均と調和平均の幾何平均をとる形になっていて、ノルム 1 の方法の固有ベクトルと転置行列の固有ベクトルの値を使用する形式に似ている。

3. まとめ

1. 行列のノルムの取り方により、固有ベクトルと転置行列の固有ベクトルを使用してウェイト推定の方法の違いを解釈ができた。
2. 新たな方法としてそれらの中間的な方法も、行列の固有ベクトルと転置したものを使用することにより可能となった。調和平均法や一般平均法は、各方法の第 1 近似を使用した方法としても解釈することができる。
3. 行列の各要素の r 乗の和をとる方法であると、その方法は相加平均と調和平均の幾何平均をとるような形式になる。また、解を求める計算は 1 次収束なので、実用化するにはさらに高速な手法を作る必要がある。

参考文献

- [1] Saaty, T.L. "The Analytic Hierarchy Process", McGraw-Hill, 1980.
- [2] Saaty, T.L. and Vargas, G.V. "Comparison of Eigenvalue, Logarithmic Least Squares and Least Squares Methods in Estimating Ratios", Mathematical Modelling, Vol.5, pp.309-324, 1984.
- [3] Kato, Y., Ozawa, M. "The characteristics of the consistency function of the general mean method", Proceedings of ISAHP'99, pp.77-82, 1999.